Université du Maine
UFR Sciences

DEUST VAS 2ème année
28 août 2008

# Vibrations mécaniques

## Exercice 1 : Réponse d'un oscillateur harmonique à une excitation

Une masse ponctuelle $m$ est accrochée à une ressort de traction-compression, de masse négligeable et de constante de raideur $k$. On étudie les oscillations libres et forcées de ce système le long de l'axe vertical $Ox$, sous l'influence d'une excitation extérieure prise sous la forme d'une arche (demi-période) de sinus à la pulsation $\omega$, soit pour l'équation du mouvement suivante : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \sin \omega t$, avec $\omega_0^2 = k / m$ et $\alpha = F / m$, où $F$ représente l'amplitude de l'excitation extérieure.

① En écrivant d'une part la réponse libre sous la forme $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$, ainsi que la réponse forcée sous la forme $x(t) = B \sin \omega t$, écrire la solution générale en utilisant les conditions initiales de déplacement et de vitesse nulles en $t = 0$. Montrer alors que le déplacement $x(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$x(t) = \frac{\alpha\, \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0}\right).$$

② Tracer schématiquement la réponse lorsque $\omega_0 > \omega$. Quelle est la réponse vibratoire du système lorsque $t > \pi / \omega$, c'est-à-dire à la fin de l'application de la force extérieure ?

## Exercice 2 : Comportement vibratoire d'une machine tournante

On considère un élément de machine modélisé par trois rotors de moment d'inertie $I_1 = I$, $I_2 = 2\,I$, $I_3 = I$ reliés par des arbres de raideurs (en rotation) $K_1 = K$ et $K_2 = K$. Les arbres sont montés sur des paliers parfaitement alignés et de géométrie idéale. Les rotors sont parfaitement équilibrés, c'est-à-dire que les centres de gravité $G_1$, $G_2$ et $G_3$ sont sur l'axe horizontal du système et que les opérateurs d'inertie sont principaux dans les repères de référence. Les positions angulaires des rotors sont définies respectivement par $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

① Les équations du mouvement de ce système peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} I\,\ddot{\theta}_1 + K\left(\theta_1 - \theta_2\right) = 0 \\ 2\,I\,\ddot{\theta}_2 + K\left(2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3\right) = 0 \\ I\,\ddot{\theta}_3 + K\left(\theta_3 - \theta_2\right) = 0 \end{aligned} \; .$$

Déterminer la matrice de raideur de ce système, ainsi que la matrice d'inertie. Quelle est la nature du couplage ? Mettre les équations du mouvement sous forme matricielle. On pourra noter $\omega_0^2 = K / I$.

② Soit $\theta_i = A_i\, Cos(\omega t + \phi_i)$ la solution harmonique recherchée : $i = 1,2,3$. Calculer les pulsations propres et les vecteurs propres correspondants. Exprimer la solution générale du mouvement de chaque rotor en fonction des solutions modales $\theta_i(t)$, avec $i = 1,2,3$. La solution modale d'un mode de corps solide (ou mode cinématique) est du type : $\theta_i(t) = \Omega.t + C$ (où $\Omega$ et $C$ sont des constantes). Établir ce résultat en sommant directement les trois équations du mouvement, puis en intégrant deux fois par rapport au temps le résultat obtenu.

③ Le système est maintenu par un montage annexe dans les conditions statiques suivantes : $\theta_1 = 0$ ; $\theta_2 = \theta_0$ ; $\theta_3 = 0$. À une date prise pour origine des temps ce système est libéré. Exprimer le mouvement de chaque rotor en exploitant les conditions initiales et les solutions obtenues en ②. Représenter l'allure des réponses $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$. Expliquer le résultat obtenu.

④ Les rotors n°1 et 2 sont impactés par un transitoire de type Dirac $\delta(t)$. On suppose que les conditions initiales décrivant cet impact peuvent s'écrire (en $t = 0$) : $\theta_0 = (0,0,0)$ ; $\dot{\theta}_0 = (\alpha,\alpha,0)$. Établir la réponse temporelle de chaque rotor. Même question lorsque $\theta_0 = (0,0,0)$ ; $\dot{\theta}_0 = (\alpha,-\alpha,0)$. Commenter les résultats obtenus et discuter de leur signification.

**Note importante** : Le barème envisagé est environ de 1/3 pour le premier exercice et 2/3 pour le second.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \sin \omega t$$

$$\begin{cases} x_1(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \\ x_2(t) = B \sin \omega t \end{cases}$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) + B \sin \omega t$$

$$C.I : \begin{cases} \text{en } t=0, \ x(0) = 0 \\ \text{en } t=0, \ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow A \sin \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos \omega_0 t + B\omega \cos \omega t$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A\omega_0 + B\omega = 0 \Rightarrow A = -\frac{B\omega}{\omega_0}$$

$$x(t) = B\left[\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t\right]$$

reste à déterminer $B$

$$\ddot{x}(t) = -B\left[\omega^2 \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \omega_0^2 \sin \omega_0 t\right]$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \sin \omega t$$

$$\Rightarrow -B\left[\omega^2 \sin \omega t - \omega\omega_0 \sin \omega_0 t\right] + \omega_0^2 B\left[\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t\right] = \alpha \sin \omega t$$

$$\Rightarrow -B\omega^2 \sin\omega t + B\omega\cancel{\omega_0 \sin\omega_0 t}$$
$$+ B\omega_0^2 \sin\omega t - B\omega\cancel{\omega_0 \sin\omega_0 t} = \alpha \sin\omega t$$

$$\Rightarrow B\left[\omega_0^2 - \omega^2\right] \sin\omega t = \alpha \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

D'où :

$$\boxed{x(t) = \frac{\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega} - \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right]}$$

$\omega_0 > \omega$


$$\frac{\sin\omega t}{\omega} = \frac{\sin\frac{\pi}{\omega}\omega}{\omega} = 0$$

Pour $t = \frac{\pi}{\omega}$, $x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\left[-\frac{\sin\omega_0\frac{\pi}{\omega}}{\omega}\right]$

Université du Maine
UFR Sciences

DEUST VAS 2ème année
19 décembre 2007

# Vibrations mécaniques

## Exercice 1 : Stabilité vibratoire d'un pendule inversé

On considère un pendule simple constitué d'une tige indéformable, de masse négligeable et de longueur $a$. Cette tige est fixée à une extrémité sur un ressort de torsion de constante de raideur $K$ permettant une liaison rotoïde parfaite. À l'autre extrémité une masse $m$ est fixée (cf. Figure 1, ci-dessous).

1- Expliquer pourquoi l'équation du mouvement de ce système peut s'écrire sous la forme suivante : $m\,a^2\,\ddot{\theta} + m\,g\,a \sin\theta + K(\theta - \theta_0) = 0$ . Que représente l'angle $\theta_0$ dans cette équation ? Quel est le signe de $\theta_1 - \theta_0$, où $\theta_1$ représente la valeur de $\theta$ pour le cas statique ? Quelle interprétation physique pouvez-vous faire de ce résultat ? Effectuer le changement de variable $\Theta = \theta - \theta_1$ dans l'équation du mouvement, développer la ligne trigonométrique $\sin\left(\Theta + \theta_1\right)$, et montrer alors que la pulsation de résonance de ce système s'écrit finalement : $\omega_0^2 = \frac{g}{a}\cos\theta_1 + \frac{K}{m\,a^2}$ . Commenter ce résultat.

2- Le pendule simple de la question précédente est dorénavant "inversé", c'est à dire que la masse $m$ est placée au-dessus du point de fixation (liaison rotoïde et ressort de torsion en bas). Comment est modifiée l'équation du mouvement de la question 1- ? Donner la réponse sans faire aucun calcul mais plutôt à partir d'un raisonnement. Que devient le signe de $\theta_1 - \theta_0$ lorsque l'on discute le cas statique pour lequel $\theta$ = cte ? Refaire le changement de variable $\Theta = \theta - \theta_1$ dans l'équation du mouvement, et aboutir à la nouvelle pulsation de résonance $\omega_0'$. Discuter physiquement ce résultat. Comment notamment interpréter les cas où $\omega_0'^2 > 0$ , $\omega_0'^2 < 0$ , et $\omega_0'^2 = 0$ ?

## Exercice 2 : Modélisation vibratoire élémentaire d'une "échelle de perroquet"

On considère une échelle de perroquet "élémentaire" constituée d'une chaîne linéaire de trois pendules simples. Chaque élément est formé d'un pendule simple de longueur $\ell$ et de masse $m$ (cf. Figure 2), attachés à une tige ayant un module de torsion $K$. Les deux pendules des extrémités sont montés à la même tige de raideur $K$ fixée sur un bâti rigide.

1- Expliquer pourquoi les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme :

$$m\,\ell^2\,\ddot{\theta}_1 + m\,g\,\ell \sin\theta_1 + K(2\theta_1 - \theta_2) = 0$$
$$m\,\ell^2\,\ddot{\theta}_2 + m\,g\,\ell \sin\theta_2 + K(2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3) = 0\ .$$
$$m\,\ell^2\,\ddot{\theta}_3 + m\,g\,\ell \sin\theta_3 + K(2\theta_3 - \theta_2) = 0$$

Ré-écrire ces équations après linéarisation et en notant : $\omega_{01}^2 = \dfrac{K}{m\,\ell^2}$ ; $\omega_{02}^2 = \dfrac{g}{\ell}$ .

2- Pour la réponse libre de ce système prise sous la forme $\theta_i = A_i \cos\omega t$, avec i = 1, 2, 3, écrire l'équation aux pulsations. Calculer les 3 pulsations propres, et montrer que les 3 vecteurs propres correspondants peuvent s'écrire sous la forme : $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Écrire finalement la solution générale sous la forme habituelle :

$$\theta_1(t) = A_1 \cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) + A_2 \cos\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) + A_3 \cos\left(\omega_3 t + \varphi_3\right)$$
$$\theta_2(t) = \sqrt{2}A_1 \cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) - \sqrt{2}A_3 \cos\left(\omega_3 t + \varphi_3\right) \quad .$$
$$\theta_3(t) = A_1 \cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) - A_2 \cos\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) + A_3 \cos\left(\omega_3 t + \varphi_3\right)$$

Interpréter ce résultat en terme de modes propres.

3- Pour les conditions initiales suivantes : $\theta_1(t=0) = \theta_{10}$ ; $\theta_2(t=0) = 0$ ; $\theta_3(t=0) = -\,\theta_{10}$;
$\dot{\theta}_1(t=0) = 0$ ; $\dot{\theta}_2(t=0) = 0$ ; $\dot{\theta}_3(t=0) = 0$ ,

montrer que seul le deuxième mode propre est excité.

4- Refaire le calcul de la question 3-, c'est à dire la résolution complète du système de 6 équations à 6 inconnues pour le nouveau jeu de conditions initiales suivantes :

$$\theta_1(t=0) = \theta_{10}\ ;\ \theta_2(t=0) = \theta_{10}\ ;\ \theta_3(t=0) = \theta_{10};$$
$$\dot{\theta}_1(t=0) = 0\ ;\ \dot{\theta}_2(t=0) = 0\ ;\ \dot{\theta}_3(t=0) = 0\ .$$

Montrer alors que les solutions s'écrivent :

$$\theta_1(t) = \alpha_1\theta_{10} \cos\omega_1 t + \beta_1\theta_{10} \cos\omega_3 t$$
$$\theta_2(t) = \alpha_2\theta_{10} \cos\omega_1 t + \beta_2\theta_{10} \cos\omega_3 t$$
$$\theta_3(t) = \theta_1(t)\ ,$$

avec $\alpha_1 = 0{,}854$ ; $\alpha_2 = 1{,}207$ ; $\beta_1 = 0{,}146$ ; $\beta_2 = 0{,}207$. Expliquer et montrer pourquoi $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \sqrt{2}\,\beta_1\right)$ ; $\alpha_2 = 1 + \beta_2$ .

5- Le système de la question 1- est excité par une force $F \cos \omega t$ s'exerçant sur le pendule n°1. Expliquer alors pourquoi les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_{01}^2\,(2\theta_1 - \theta_2) + \omega_{02}^2\,\theta_1 = f\cos\omega\, t$$
$$\ddot{\theta}_2 + \omega_{01}^2\,(2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3) + \omega_{02}^2\,\theta_2 = 0 \quad ,$$
$$\ddot{\theta}_3 + \omega_{01}^2\,(2\theta_3 - \theta_2) + \omega_{02}^2\,\theta_3 = 0$$

où $f = \dfrac{F}{m\,\ell^2}$. Pour une solution harmonique prise sous la forme $\theta_i = A_i \cos\omega t$, calculer les amplitudes $A_1$, $A_2$ et $A_3$. Montrer que $A_1 = 0$ pour deux pulsations particulières que l'on déterminera. Montrer que $A_2 = 0$ pour une pulsation remarquable, et que $A_3$ ne peut jamais s'annuler.

## Exercice 3 : Vibrations longitudinales d'une poutre encastrée en $x = 0$ et attachée à une masse $M$ (en $x = + L$) - (6 points)

1- Soit une poutre de longueur $L$ "encastrée - attachée" en **mouvement longitudinal.** On supposera que la poutre est encastrée en $x = 0$, soit $u_{(x=0)} = 0$. La poutre est de section $S$, de module d'Young $E$ et de masse volumique $\rho$. Écrire le théorème de la résultante dynamique (principe fondamental de la dynamique pour le mouvement en translation) sous la forme $F_{(x=+L)} = SE\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(x=+L)} = -M\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{(x=+L)}$, et aboutir à la relation de dispersion sous la forme $L\,\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\tan\left(L\,\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\right) = \frac{\rho L S}{M}$.

2- Dans le cas limite pour lequel $M >> m_{barre} = \rho\ L\ S$, montrer que la fréquence angulaire (ou pulsation) fondamentale $\omega_0$ peut se mettre sous la forme $\omega_0 = \sqrt{\frac{E\,S}{L\,M}}$. Interpréter ce résultat en liaison avec le cas des vibrations d'un oscillateur constitué d'une masse $M$ accrochée à une raideur de constante $K$ que l'on déterminera.

3- Dans le cas général l'équation de dispersion de la question 1- peut se mettre sous la forme $X\ \tan X = R$, avec $X = L\,\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}$ et $R = \frac{\rho L S}{M}$. En utilisant une construction graphique (représentation des fonctions $\tan X$ et $R/X$), montrer que les solutions $X_n$ des différents modes doivent pouvoir d'écrire $X_n = n\pi + \varepsilon_n$, pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Montrer alors que pour un mode d'ordre $n$ arbitraire, $\varepsilon_n = \frac{1}{2}\left(-n\pi + \sqrt{n^2\pi^2 + 4R}\right)$. Montrer finalement que $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. En déduire que les vibrations longitudinales d'une poutre "encastrée - attachée" sont "presque harmoniques", tout du moins pour les modes de vibrations de fréquences suffisamment élevées.

---

***Nota Bene : Le barême envisagé est de 4 points pour l'exercice 1, 10 points pour l'exercice 2, et 6 points pour l'exervice 3.***

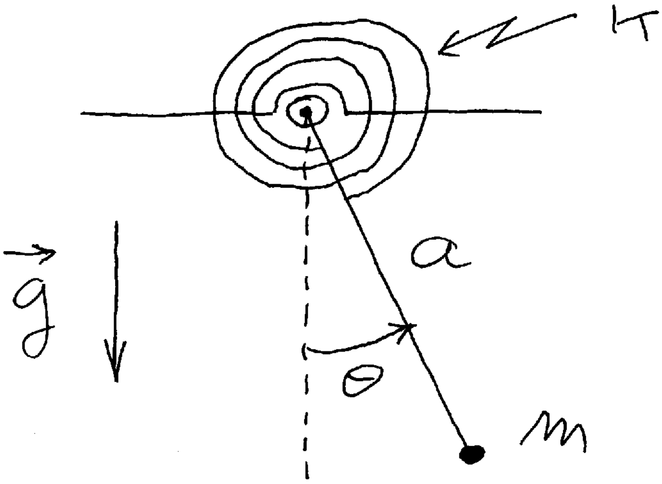



Figure 1

Figure 2

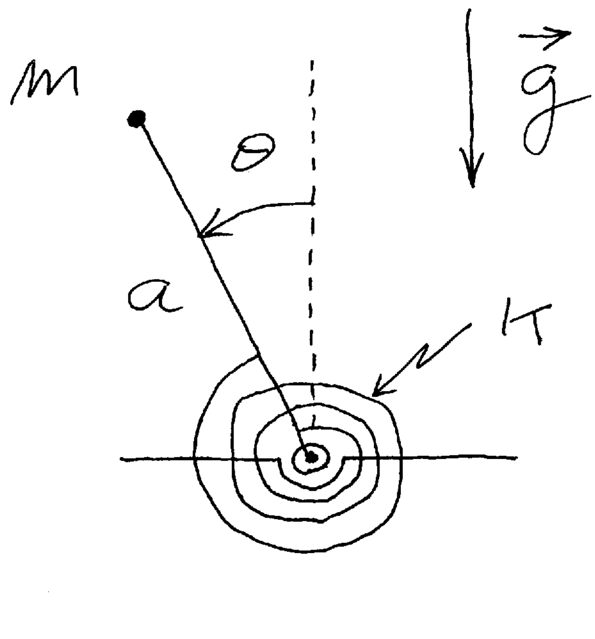
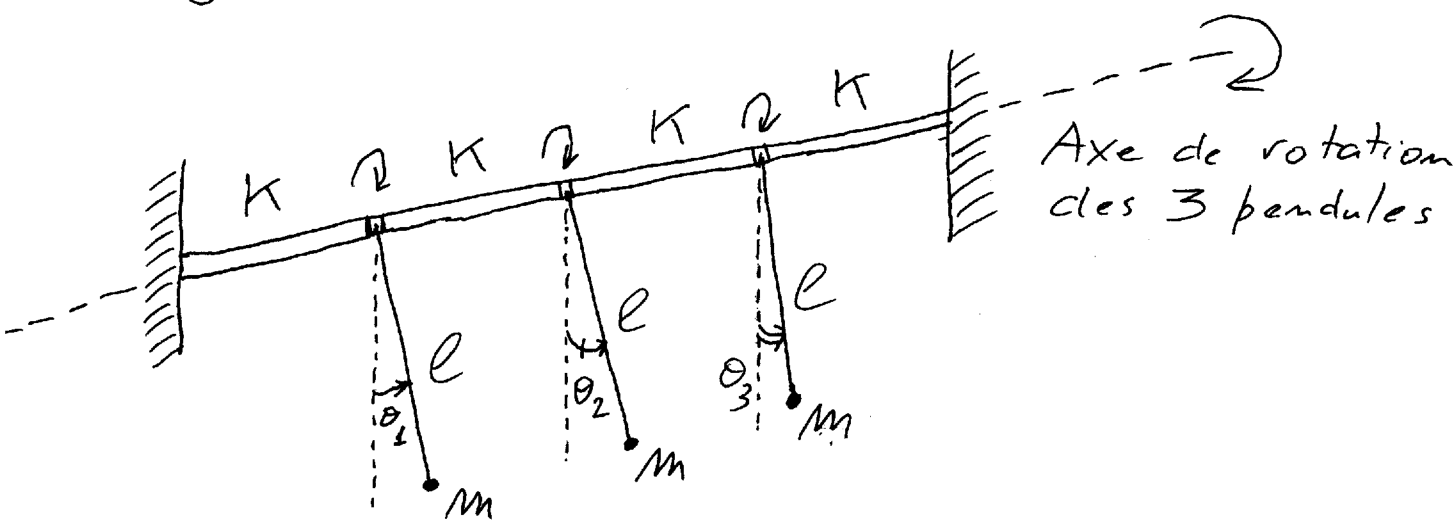


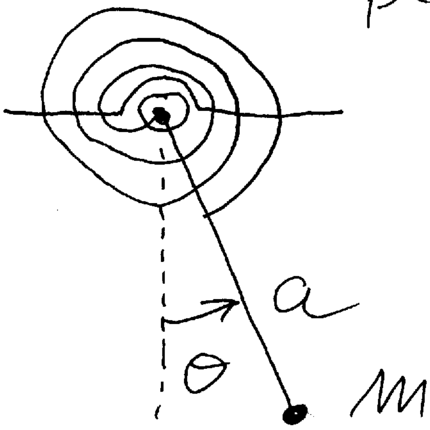

Figure 3



DEUST VAS 2ème année, dec. 2007

Examen de vibrations mécaniques

Exercice 1 : Stabilité vibratoire d'un pendule inversé




1 - Par inspection, l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme suivante :

$$ma^2\ddot{\theta} + mga\sin\theta + K(\theta - \theta_0) = 0$$

soit pour le cas statique ($\ddot{\theta} = 0$) :

$$mga\sin\theta_1 + K(\theta_1 - \theta_0) = 0$$

$$\Rightarrow \theta_1 - \theta_0 = -\frac{mga}{K}\sin\theta_1 < 0$$

D'où $\theta_1 < \theta_0$

Si l'on repart de l'équation du mouvement de départ, en utilisant le changement de variable, $\Theta = \theta - \theta_1$, soit $\ddot{\Theta} = \ddot{\theta}$, avec $\Theta \ll \theta_1$

$$\Rightarrow ma^2\ddot{\Theta} + mga\sin(\Theta + \theta_1) + K(\Theta + \theta_1 - \theta_0) = 0$$

avec $\sin(\Theta + \theta_1) = \sin\Theta\cos\theta_1 + \cos\Theta\sin\theta_1$

$$\simeq \Theta\cos\theta_1 + \sin\theta_1$$

$$\Rightarrow ma^2\ddot{\Theta} + mga[\Theta\cos\theta_1 + \sin\theta_1] + K\Theta + K(\theta_1 - \theta_0) = 0$$

or $\theta_1 - \theta_0 = -\dfrac{mga}{K}\sin\theta_1$

.../...

$$\Rightarrow ma^2\ddot{\Theta} + mga\left[\Theta\cos\theta_1 + \sin\theta_1\right] + K\Theta - mga\sin\theta_1 = 0$$

$$\Rightarrow ma^2\ddot{\Theta} + \left[mga\cos\theta_1 + K\right]\Theta = 0$$

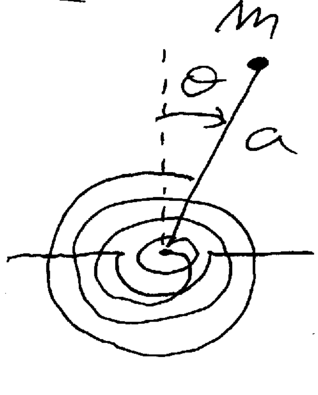
$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{mga\cos\theta_1 + K}{ma^2}$$

soit $\omega_0^2 = \frac{g}{a}\cos\theta_1 + \frac{K}{ma^2}$

Il y a deux termes, l'un relié à la pesanteur et l'autre dû à la raideur. Si la raideur augmente, ou bien si la pesanteur s'accroît, alors $\omega_0$ augmente. Si la longueur du pendule augmente, alors $\omega_0$ diminue. Ces deux résultats sont logiques.

2 - Pour le pendule inversé, l'équation du mouvement est modifiée en prenant $g$ en $-g$, d'où le résultat :

$$ma^2\ddot{\theta} - mga\sin\theta + K(\theta - \theta_0) = 0$$




Cas statique :

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{mga}{K}\sin\theta_1 > 0$$

$$\Rightarrow \theta_1 > \theta_0 \quad \text{CQFD}$$

$$\Theta = \theta - \theta_1 \Rightarrow \ddot{\Theta} = \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow ma^2\ddot{\Theta} - mga\sin(\Theta + \theta_1) + K(\Theta + \theta_1 - \theta_0) = 0$$

$$\sin(\Theta + \theta_1) = \sin\Theta \cos\theta_1 + \cos\Theta \sin\theta_1$$
$$\simeq \Theta \cos\theta_1 + \sin\theta_1$$

$$\Rightarrow m a^2 \ddot{\Theta} - mga\left[\Theta \cos\theta_1 + \sin\theta_1\right] + K\Theta + mga\sin\theta_1 = 0$$

$$\Rightarrow m a^2 \ddot{\Theta} + \left[K - mga\cos\theta_1\right]\Theta = 0$$

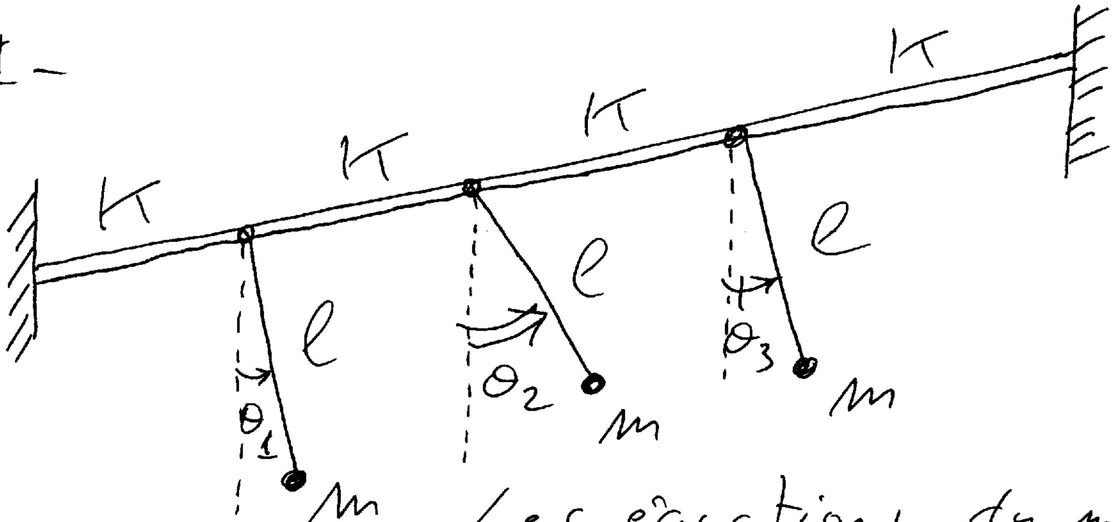
D'où $\omega_0^2 = \dfrac{K}{ma^2} - \dfrac{g}{a}\cos\theta_1$

Il existe 3 cas. Pour $\omega_0^2 = 0$, $K = mga\cos\theta_1$, la période $\to \infty$

- Si $\omega_0^2 > 0$, $\dfrac{K}{ma} > g\cos\theta_1$, la raideur "l'emporte" sur la gravité et dans ce cas, il y aura des oscillations
- si $\omega_0^2 < 0$, $g\cos\theta_1 > \dfrac{K}{ma}$, la gravité (pesanteur) "l'emporte" sur la raideur de rappel. Le mouvement n'est plus oscillatoire ($\omega_0^2 < 0$), il y a perte de stabilité, dans ce cas.

## Exercice 2 : Modélisation vibratoire élémentaire d'une "échelle de perroquet"

1 –




Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ell^2\ddot{\theta}_1 + K(2\theta_1-\theta_2) + mg\ell\sin\theta_1 = 0 \\ m\ell^2\ddot{\theta}_2 + K(\theta_2-\theta_1) + K(\theta_2-\theta_3) + mg\ell\sin\theta_2 = 0 \\ m\ell^2\ddot{\theta}_3 + K(2\theta_3-\theta_2) + mg\ell\sin\theta_3 = 0 \end{cases}$$

Soit après linéarisation, $\sin\theta \simeq \theta$
et en notant $\omega_{01}^2 = K/m\ell^2$ ; $\omega_{02}^2 = g/\ell$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_{01}^2(2\theta_1-\theta_2) + \omega_{02}^2\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_{01}^2(2\theta_2-\theta_1-\theta_3) + \omega_{02}^2\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_3 + \omega_{01}^2(2\theta_3-\theta_2) + \omega_{02}^2\theta_3 = 0 \end{cases}$$

2 – Soit pour des solutions harmoniques
$\theta_i = \Theta_i\cos\omega t \Rightarrow \ddot{\theta}_i = -\omega^2\theta_i$ ; $i=1,2,3$

$$\begin{bmatrix} 2\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2 & -\omega_{01}^2 & 0 \\ -\omega_{01}^2 & 2\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2 & -\omega_{01}^2 \\ 0 & -\omega_{01}^2 & 2\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\\ \Theta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (2\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2)\left[(2\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2)^2-\omega_{01}^4\right]$$
$$-\omega_{01}^4\,(2\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2)=0$$
$$\Rightarrow (2\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2)\left[(2\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2)^2-(\sqrt{2}\,\omega_{01}^2)^2\right]=0$$
$$\Rightarrow \left[(2-\sqrt{2})\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2\right]\left[2\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2\right]\times$$
$$\left[(2+\sqrt{2})\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2\right]=0$$

D'où 3 pulsations propres, et 3 vecteurs propres associés

- $\omega_1^2=(2-\sqrt{2})\omega_{01}^2+\omega_{02}^2 \Rightarrow \vec{V}_1=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$
- $\omega_2^2=2\omega_{01}^2+\omega_{02}^2 \Rightarrow \vec{V}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$
- $\omega_3^2=(2+\sqrt{2})\omega_{01}^2+\omega_{02}^2 \Rightarrow \vec{V}_3=\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$

D'où finalement la solution générale :

$$\begin{cases}\theta_1(t)=A_1\cos(\omega_1t+\phi_1)+A_2\cos(\omega_2t+\phi_2)+A_3\cos(\omega_3t+\phi_3)\\ \theta_2(t)=\sqrt{2}A_1\cos(\omega_1t+\phi_1)\qquad\qquad-\sqrt{2}A_3\cos(\omega_3t+\phi_3)\\ \theta_3(t)=\underset{\uparrow}{A_1\cos(\omega_1t+\phi_1)}-\underset{\uparrow}{A_2\cos(\omega_2t+\phi_2)}+\underset{\uparrow}{A_3\cos(\omega_3t+\phi_3)}\end{cases}$$

1$^{er}$ mode propre    2$^{ème}$ mode propre    3$^{ème}$ mode propre

3 - Conditions initiales : $\theta_1(t=0)=\theta_{10}$ ; $\theta_2(t=0)=0$ ; $\theta_3(t=0)=-\theta_{10}$
$\dot\theta_1(t=0)=0$ ; $\dot\theta_2(t=0)=0$ ; $\dot\theta_3(t=0)=0$

$$\begin{cases}\theta_{10}=A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2+A_3\cos\phi_3 & (1)\\ 0=\sqrt{2}A_1\cos\phi_1\qquad-\sqrt{2}A_3\cos\phi_3 & (2)\\ -\theta_{10}=A_1\cos\phi_1-A_2\cos\phi_2+A_3\cos\phi_3 & (3)\\ 0=A_1\omega_1\sin\phi_1+A_2\omega_2\sin\phi_2+A_3\omega_3\sin\phi_3 & (4)\\ 0=\sqrt{2}\omega_1\sin\phi_1\qquad-\sqrt{2}A_3\omega_3\sin\phi_3 & (5)\\ 0=A_1\omega_1\sin\phi_1-A_2\omega_2\sin\phi_2+A_3\omega_3\sin\phi_3 & (6)\end{cases}$$

$$(1)+(3) \Rightarrow A_1 \cos\phi_1 + A_3 \cos\phi_3 = 0$$
$$(2) \Rightarrow A_1 \cos\phi_1 - A_3 \cos\phi_3 = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 \cos\phi_1 = 0 \\ A_3 \cos\phi_3 = 0 \end{cases}$$

$$(4)+(6) \Rightarrow A_1\omega_1 \sin\phi_1 + A_3\omega_3 \sin\phi_3 = 0$$
$$(5) \Rightarrow A_1\omega_1 \sin\phi_1 - A_3\omega_3 \sin\phi_3 = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 \sin\phi_1 = 0 \\ A_3 \sin\phi_3 = 0 \end{cases}$$

D'où $A_1 = A_3 = 0$

Il reste alors uniquement le second mode :

$$\theta_{10} = A_2 \cos\phi_2 \ ; \quad 0 = A_2\omega_2 \sin\phi_2$$
$$\Rightarrow \phi_2 = 0 \quad \text{et} \quad A_2 = \theta_{10}$$

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_{10} \cos\omega_2 t \\ \theta_2(t) = 0 \\ \theta_3(t) = -\theta_{10} \cos\omega_2 t = -\theta_1(t) \end{cases}$$

4 – On modifie les 3 premières conditions initiales :

$$\begin{cases} \theta_{10} = A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2 + A_3 \cos\phi_3 & (1) \\ \theta_{10} = \sqrt{2} A_1 \cos\phi_1 - \sqrt{2} A_3 \cos\phi_3 & (2) \\ \theta_{10} = A_1 \cos\phi_1 - A_2 \cos\phi_2 + A_3 \cos\phi_3 & (3) \\ 0 = A_1\omega_1 \sin\phi_1 + A_2\omega_2 \sin\phi_2 + A_3\omega_3 \sin\phi_3 & (4) \\ 0 = \sqrt{2} A_1\omega_1 \sin\phi_1 - \sqrt{2} A_3\omega_3 \sin\phi_3 & (5) \\ 0 = A_1\omega_1 \sin\phi_1 - A_2\omega_2 \sin\phi_2 + A_3\omega_3 \sin\phi_3 & (6) \end{cases}$$

$$(1)-(3) \Rightarrow A_2 \cos\phi_2 = 0$$
$$(4)-(6) \Rightarrow A_2 \sin\phi_2 = 0$$
$$\Rightarrow A_2 = 0$$

$$(4)+(6) \Rightarrow A_1\omega_1 \sin\phi_1 + A_3\omega_3 \sin\phi_3 = 0$$
$$(5) \Rightarrow A_1\omega_1 \sin\phi_1 - A_3\omega_3 \sin\phi_3 = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 \sin\phi_1 = 0 \\ A_3 \sin\phi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \phi_1 = \phi_3 = 0$$

$$(1)+(3) \Rightarrow A_1 \cos\phi_1 + A_3 \cos\phi_3 = \theta_{10}$$
$$(2) \Rightarrow A_1 \cos\phi_1 - A_3 \cos\phi_3 = \frac{\theta_{10}}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{1}{2}\theta_{10} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\theta_{10} \\ A_3 = +\frac{1}{2}\theta_{10} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\theta_{10} \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \; ; \; \beta_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{2}\,\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$\beta_2 = \sqrt{2}\,\beta_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{1+\beta_2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} = \underline{\underline{\alpha_2}}$$

OK

$$\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}\,\beta_1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$$

$$= \underline{\underline{\alpha_1}}$$

OK

Au final pour ce cas, on obtient :

$$\begin{cases} \theta_{10} = A_1 + A_3 \\ \theta_{10} = \sqrt{2} A_1 - \sqrt{2} A_3 \end{cases}$$

soit $A_1 = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right) \theta_{10}$ ; $A_3 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right) \theta_{10}$

soit $\begin{cases} \theta_1(t) = \alpha_1 \theta_{10} \cos\omega_1 t + \beta_1 \theta_{10} \cos\omega_3 t \\ \theta_2(t) = \alpha_2 \theta_{10} \cos\omega_1 t + \beta_2 \theta_{10} \cos\omega_2 t \\ \theta_3(t) = \theta_1(t) \end{cases}$ ,

avec $\alpha_1 = A_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = 0,854$

$\beta_1 = A_3 = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = 0,146$

$\alpha_2 = \sqrt{2}\alpha_1 = 1,207$

$\beta_2 = \sqrt{2}\beta_1 = 0,207$

on a effectivement $\alpha_2 = 1 + \beta_2$

et $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2}\beta_1)$

5 - En présence d'une force extérieure appliquée sur le 1er degré de liberté, $F\cos\omega t$, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 + K(2\theta_1 - \theta_2) + mgl\sin\theta_1 = F\cos\omega t \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + K(2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3) + mgl\sin\theta_2 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_3 + K(2\theta_3 - \theta_2) + mgl\sin\theta_3 = 0 \end{cases}$$ ,

soit en notant $\omega_{01}^2 = \frac{K}{ml^2}$ ; $\omega_{02}^2 = \frac{g}{l}$ ; $f = \frac{F}{\cos\omega t}$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_{01}^2(2\theta_1 - \theta_2) + \omega_{02}^2\theta_1 = f\cos\omega t \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_{01}^2(2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3) + \omega_{02}^2\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_3 + \omega_{01}^2(2\theta_3 - \theta_2) + \omega_{02}^2\theta_3 = 0 \end{cases} ,$$

soit pour des solutions harmoniques $\theta_i = A_i\cos\omega t$

$$\begin{bmatrix} 2\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - \omega^2 & -\omega_{01}^2 & 0 \\ -\omega_{01}^2 & 2\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - \omega^2 & -\omega_{01}^2 \\ 0 & -\omega_{01}^2 & 2\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où les solutions pour $A_1$, $A_2$ et $A_3$

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{f}{\det}\left[3\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - \omega^2\right]\left[\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - \omega^2\right] \\ A_2 = \dfrac{f}{\det}\,\omega_{01}^2\left(2\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - \omega^2\right) \\ A_3 = \dfrac{f}{\det}\,\omega_{01}^4 \end{cases} ,$$

avec $\det = \left((2-\sqrt{2})\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - \omega^2\right)\left(2\omega_{01}^2 - \omega^2\right) \times$
$\left((2+\sqrt{2})\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - \omega^2\right)$

$A_1 = 0$, si $\omega^2 = \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2$ ou si $\omega^2 = 3\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2$

$A_2 = 0$, si $\omega^2 = 2\omega_{02}^2$, normal car $2^{ème}$ mode propre excité

$A_3 \neq 0$, $\forall \omega$, normal, car ce degré de liberté est "libre" de se déplacer.

Exercice 3 : Vibrations longitudinales d'une poutre encastrée (en $x=0$), et attachée à une masse $M$ (en $x=+L$)

1 – La solution générale pour ce problème est prise sous la forme (méthode de séparation des variables $x$ et $t$) :

$$u(x,t) = \phi(x) f(t) = (A\cos kx + B\sin kx)\cos\omega t,$$

avec $k = \dfrac{\omega}{c} = \sqrt{\dfrac{\rho}{E}}\,\omega$.

La condition d'encastrement en $x=0$ s'écrit :

$$u(0,t)=0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow \phi(x) = \sin \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\,x$$

De plus, $F(L,t) = ES\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{(x=L)} = -M\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{(x=L)}$

$$\Rightarrow ES\,\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L = M\omega^2 \sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L$$

$$\Rightarrow L\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\tan\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L = \frac{\rho L S}{M} \qquad (E)$$

2 – Lorsque $M \gg m_{barre} = \rho L S$

$$\Rightarrow L\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\tan\omega L\sqrt{\frac{\rho}{E}} \simeq 0 .$$

Dès lors, $\tan\omega L\sqrt{\dfrac{\rho}{E}} \simeq L\omega\sqrt{\dfrac{\rho}{E}}$

$$\Rightarrow L^2\omega_0^2\frac{\rho}{E} = \frac{\rho L S}{M} \simeq 0$$

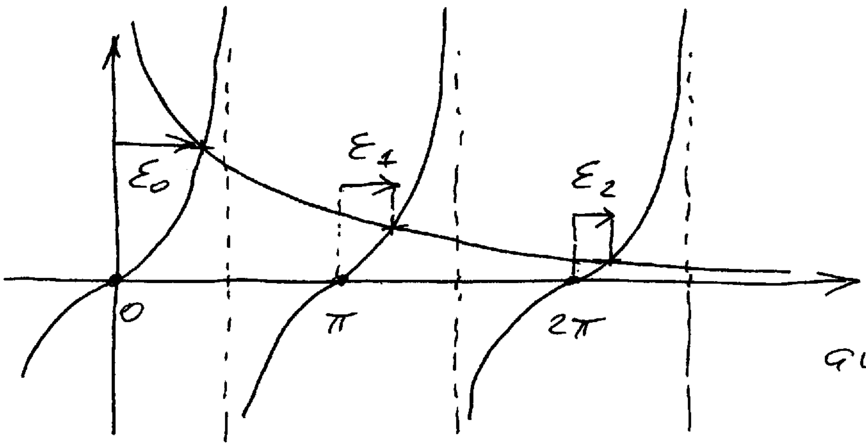
$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{ES}{ML}} = \sqrt{\frac{K}{M}}, \text{ avec } K = \frac{ES}{L}$$

Tout se passe comme si l'on avait affaire à un système à un degré de liberté de type masse ($M$)/ressort ($K = ES/L$).

3 – L'équation $(E)$ peut se réécrire sous la forme :

$$X\tan X = R, \text{ avec } X = L\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}} \text{ et } R = \frac{\rho L S}{M}$$

Cette équation ($\tan X = R/X$) peut être étudiée graphiquement (cf. figure ci-dessous)




Les solutions s'écrivent :

$X_n = n\pi + \varepsilon_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, avec $\varepsilon_n \ll 1$

$$\Rightarrow \tan X_n = \frac{R}{X_n} \Rightarrow \tan(n\pi + \varepsilon_n) = \frac{R}{n\pi + \varepsilon_n}$$

$$\text{or } \tan(n\pi + \varepsilon_n) = \frac{\tan n\pi + \tan \varepsilon_n}{1 - \tan n\pi \tan \varepsilon_n} = \tan \varepsilon_n$$

$$\Rightarrow \tan(n\pi + \varepsilon_n) = \tan \varepsilon_n \simeq \varepsilon_n$$

$$\Rightarrow \varepsilon_n = \frac{R}{n\pi + \varepsilon_n} \Rightarrow \varepsilon_n^2 + n\pi\varepsilon_n - R = 0$$

$$(\Delta = n^2\pi^2 + 4R)$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2}\left(-n\pi + \sqrt{n^2\pi^2 + 4R}\right)$$

Pour $n \to \infty$, $n^2\pi^2 \gg 4R$

$$\varepsilon_n \# \frac{1}{2}\left(-n\pi + n\pi\left(1 + \frac{2R}{n^2\pi^2}\right)\right)$$

$$\boxed{\varepsilon_n = \frac{R}{n^2\pi^2}} \qquad \text{pour } n \to \infty, \ \varepsilon_n \to 0$$

CQFD

Puisque $\varepsilon_n \to 0$ pour $n$ suffisamment élevés, on peut en déduire que les oscillations longitudinales de la poutre encastrée en $x = 0$, et attachée à une masse $M$ en $x = +L$, seront approximativement harmoniques pour les modes supérieurs. Ce n'est toutefois pas le cas pour les premiers modes.

Université du Maine
UFR Sciences

DEUST VAS 2ème année
20 décembre 2006

# Vibrations mécaniques

## Exercice 1 : Oscillations d'un cylindre sur un plan incliné

Un cylindre en mouvement de rotation, de masse $m$ et de rayon $R$ est fixé à un support par l'intermédiaire d'un ressort de traction - compression de constante de raideur $k$ (cf. Figure 1, ci-dessous). L'ensemble est placé sur un plan incliné faisant un angle $\alpha$ avec l'horizontale.

1- On suppose que $\alpha = 0$. L'énergie cinétique de rotation, en supposant que le moment d'inertie $J$ du cylindre est $J = \frac{1}{2} m R^2$, peut s'écrire sous la forme $E_C^{rot} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$. Écrire l'énergie cinétique de translation $E_C^{trans} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, l'énergie potentielle $E_P = \frac{1}{2} k x^2$ liée aux raideurs. Calculer l'équation du mouvement, en supposant que le système est conservatif ($E_M = E_P + E_C^{trans} + E_C^{rot}$ = Cte), et en utilisant la condition de roulement sans glissement du cylindre, $x = R\,\theta$. Aboutir à la relation $3\,m\,\ddot{x} + 2\,k\,x = 0$, et en déduire la pulsation de résonance des oscillations $\omega_0$.

2- On suppose que $\alpha \neq 0$. Pour un angle $\alpha$ arbitraire différent de 0, l'équation du mouvement est modifiée, car il faut prendre en compte la pesanteur par l'intermédiaire d'un terme $mg \sin \alpha$. Quelle est alors la modification de l'équation du mouvement. Est-ce que la pulsation $\omega_0$ est modifiée ? Justifier votre réponse. Discuter le cas limite $\alpha = \pi / 2$, en supposant que la condition de roulement sans glissement du cylindre sur le plan incliné ne s'applique plus. Calculer alors la nouvelle pulsation des oscillations $\omega_0'$, et interpréter le résultat $\omega_0' > \omega_0$.

## Exercice 2 : Modélisation vibratoire élémentaire d'un tapis roulant

Un tapis roulant est modélisé par deux rouleaux de rayons respectifs $R_1$ et $R_2$ et de moment d'inertie $J_1$ et $J_2$. Des éléments élastiques de raideur $k_1$, $k_2$ et $k_3$ relient les tambours entre eux, ou bien à des bâtis fixes (cf. Figure 2 et 3).

1- Pour le système de la Figure 2, les équations du mouvement des deux pendules peuvent s'écrire :

$$J_1\ddot{\theta}_1 = -k_1\left(R_1\theta_1\right)R_1 - k_2\left(R_1\theta_1 - R_2\theta_2\right)R_1$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 = -k_3\left(R_2\theta_2\right)R_2 - k_2\left(R_2\theta_2 - R_1\theta_1\right)R_2$$

Expliquer et commenter ces équations, notamment par analogie avec un système en translation couplé de deux masses et de trois ressorts. Justifier qualitativement l'existence de terme en $R^2$. Re-écrire ces équations en présence de symétrie complète $k_1 = k_2 = k_3 = k$ ; $J_1 = J_2 = J$ ; $R_1 = R_2 = R$, et en notant la pulsation $\omega_0^2 = kR^2 / J$.

2- Chercher des solutions harmoniques sous la forme $\theta_1 = A_1 \cos \omega t$, $\theta_2 = A_2 \cos \omega t$. Ecrire l'équation aux pulsations, calculer les deux pulsations propres et les vecteurs modaux associés. Donner un commentaire sur la nature des modes, soit en phase soit en opposition de phase.

3- La Figure 3 présente la modélisation élémentaire d'un tapis roulant constitué de deux rouleaux et de l'élément de sol élastique, guidé sur le dessus de raideur $k_1$, et libre en-dessous de raideur $k_2$. En vous inspirant des résultats de la question 1, expliquer pourquoi les équations du mouvement peuvent s'écrire :

$$
\begin{aligned}
J_1\ddot{\theta}_1 &= -\left(k_1 + k_2\right)\left(R_1\theta_1 - R_2\theta_2\right) R_1 \\
J_2\ddot{\theta}_2 &= -\left(k_1 + k_2\right)\left(R_2\theta_2 - R_1\theta_1\right) R_2
\end{aligned}
$$

Re-écrire ces équations en présence de symétrie complète $k_1 = k_2 = k$ ; $J_1 = J_2 = J$ ; $R_1 = R_2 = R$.

4- Faire la somme des deux équations obtenues à la question 3-. Interpréter la solution de cette nouvelle équation sous la forme d'un mode de corps rigide $\theta_1(t) = \theta_2(t) = at + b$. Faire alors la différence des deux équations de la question 3-, et après changement de variable $\Theta = \theta_1 - \theta_2$, montrer que l'on aboutit à l'équation différentielle élémentaire d'un oscillateur, que l'on interprétera.

5- On reprend l'analyse vibratoire des deux équations couplées du mouvement pour le cas du système complétement symétrique :

$$
\begin{aligned}
J_1\ddot{\theta}_1 + 2kR^2\left(\theta_1 - \theta_2\right) &= 0 \\
J_2\ddot{\theta}_2 + 2kR^2\left(\theta_2 - \theta_1\right) &= 0
\end{aligned},
$$

avec $\omega_0^2 = 2\,kR^2 / J$. Rechercher des solutions sous forme harmonique. Calculer les pulsations de résonance, ainsi que les vecteurs propres modaux correspondants. Ecrire la solution générale pour $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

6- Un couple extérieur s'applique sur le tambour 1 sous la forme d'un terme $\Gamma$ dans le second membre de la première équation. Calculer les amplitudes $A_1$ et $A_2$ du mouvement des tambours 1 et 2. Chercher la solution du mouvement pour le mode de corps rigide obtenu en additionnant les deux équations du mouvement. Montrer que la partie non vibratoire peut s'écrire : $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma}{J}t^2 + At + B$. Quel commentaire vous inspire ce résultat ? La vitesse de déroulement du tapis roulant ne peut pas augmenter de manière continue. Un certaine limite doit exister. Quelle peut en être l'origine, et comment ?

## Exercice 3 : Vibrations longitudinales d'une poutre encastrée en $x = 0$ et de condition limite arbitraire (en $x = + L$)

1- Soit une poutre de longueur $L$ alignée le long de l'axe $Ox$, "encastrée" en $x = 0$, soit $u_{(x=0,t)} = 0$, en **mouvement longitudinal** (cf. Figure 4). La poutre est de section $S$, de module d'Young $E$ et de masse volumique $\rho$. Écrire le théorème de la résultante dynamique (principe fondamental de la dynamique pour le mouvement en translation) sous la forme $\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$. Montrer que $u(x,t)$ peut se mettre sous la forme suivante : $u(x,t) = A \sin \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\, x \cos \omega t$. On suppose que la poutre est libre à l'autre extrémité (en x = + L). Quelle est alors la condition associée ? En déduire les fréquences de résonance. Pourquoi seuls les harmoniques impairs peuvent exister ?

2- Dans le cas où la poutre est encastrée à ses deux extrémités, indiquer la nouvelle condition limite en x = + L. Calculer les nouvelles fréquences de résonance. Effectuer l'application numérique pour les deux configurations (barre "encastrée - libre" ou barre "encastrée - encastrée") pour une barre en aluminium de *1 m* de longueur. On donne $\rho = 2{,}702\ 10^3\ kg/m^3$ ; $E = 10{,}50\ 10^{10}\ N/m^2$. Pourquoi la fréquence d'oscillation du mode fondamental est plus basse lorsque la barre est "encastrée - libre" par rapport au cas où elle est "encastrée - encastrée" ?

---

***Nota Bene : Le barême envisagé est de 4 points pour l'exercice 1, 12 points pour l'exercice 2, et 4 points pour l'exervice 3.***

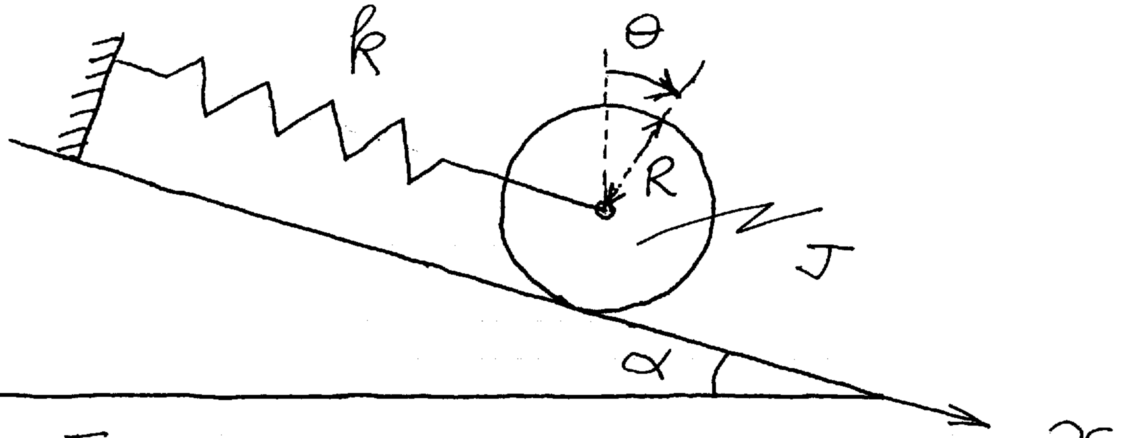



Figure 1

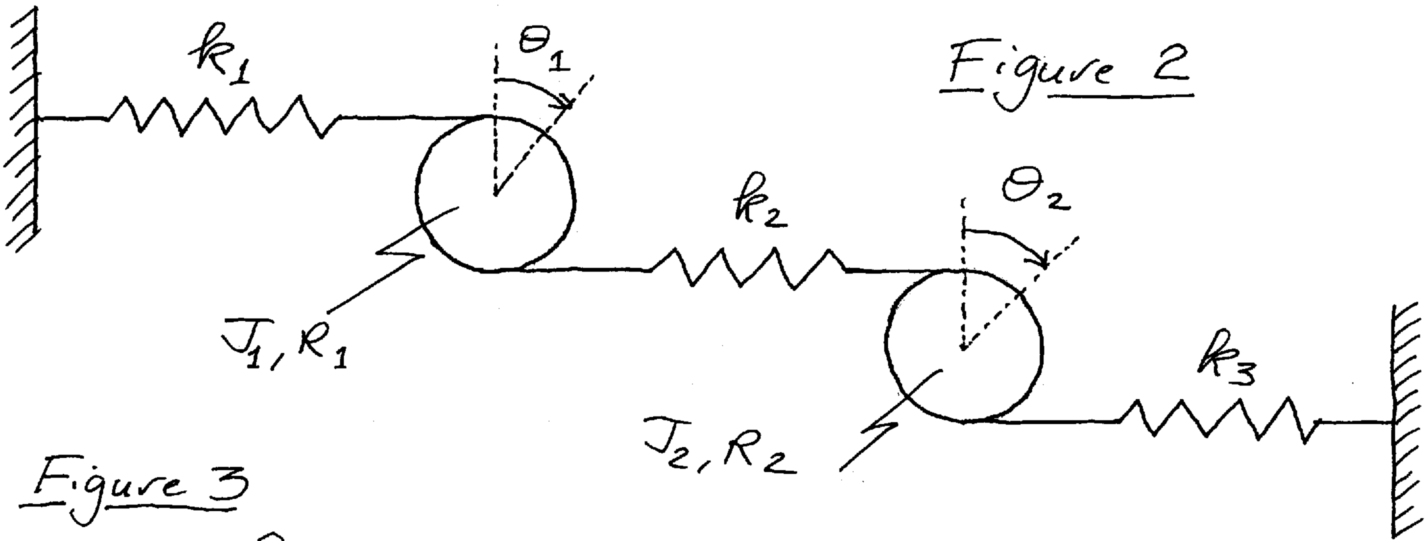
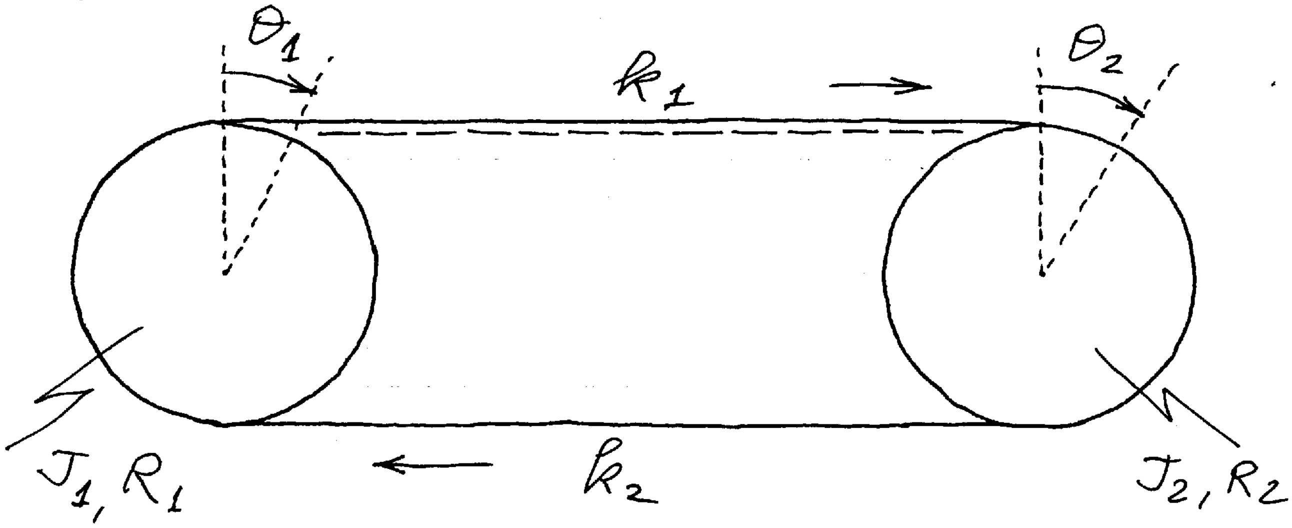



Figure 2

Figure 3



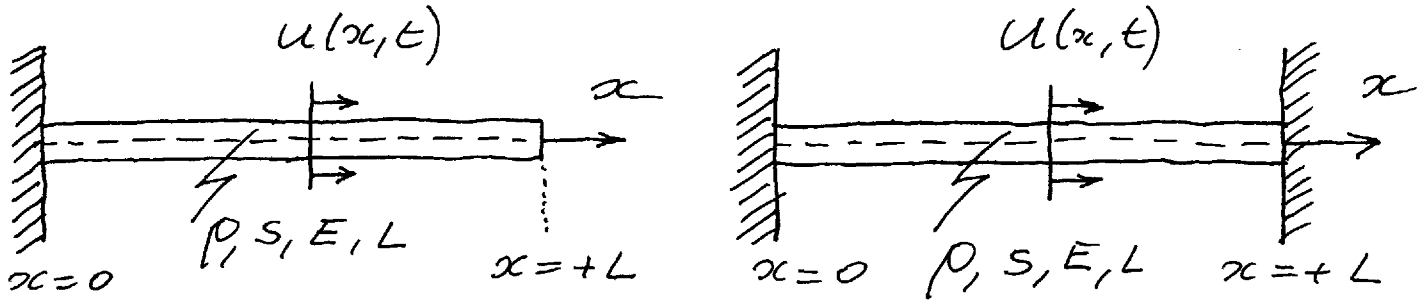




Figure 4

DEUST VAS 2ème année – Déc. 06

Examen de Vibrations mécaniques

Exercice 1 : Oscillations d'un cylindre sur un plan incliné.

1 – Pour $\alpha = 0$, la méthode de conservation de l'énergie aboutit à l'équation du mouvement : $E_M = E_c + E_p = cte$

$\Rightarrow \dfrac{dE_c}{dt} + \dfrac{dE_p}{dt} = 0$, avec $E_p = \frac{1}{2} k x^2$

et $E_c = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, où

$J = \frac{1}{2} m R^2$ et $\omega = \dot{x}/R$ (condition de roulement sans glissement)

$$\frac{dE_M}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x} + k x = 0$$

d'où $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{3m}}$

2 – Pour $\alpha \neq 0$, tant que la condition de roulement sans glissement est respectée, la pulsation de résonance est inchangée. Par contre, l'équation du mouvement est éventuellement modifiée, car il faut introduire le terme statique lié à la force de pesanteur

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + k x = mg \sin\alpha \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k} \sin\alpha$$

à l'équilibre

$$\Rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x} = k(x_0 - x)$$

soit en posant $X(t) = x(t) - x_0$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{X}(t) + k X(t) = 0 ,$$

soit l'équation de départ, admettant

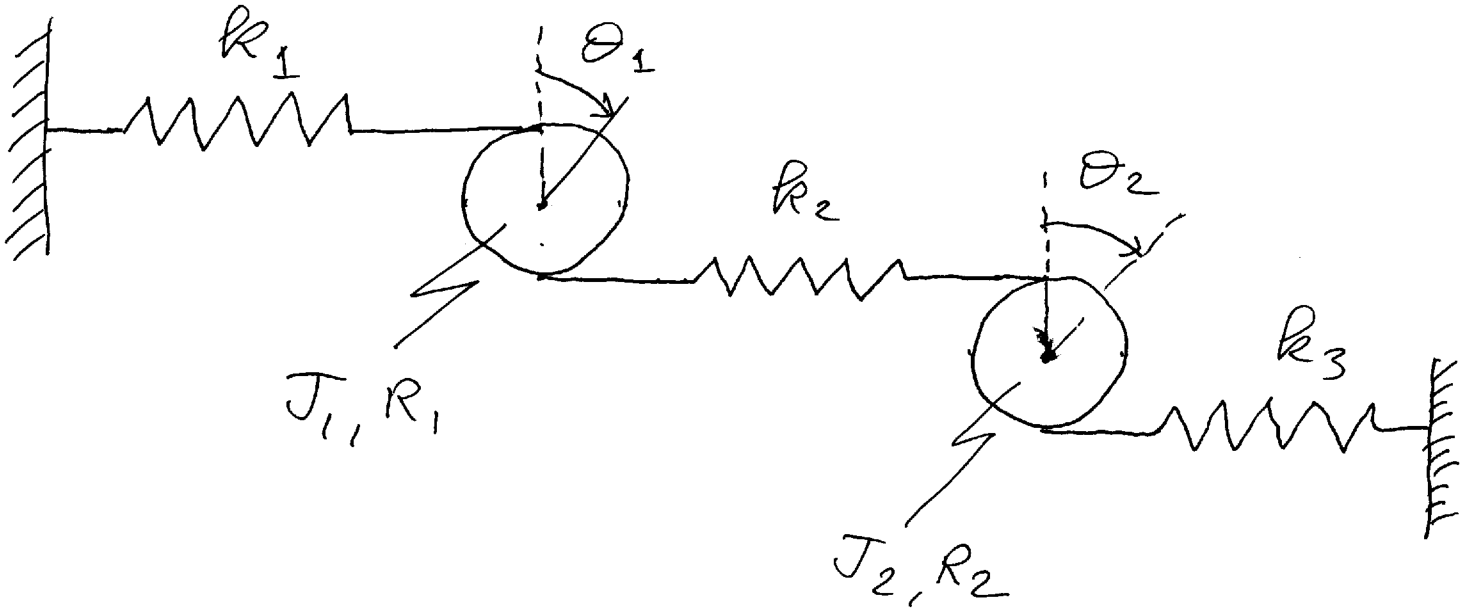
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} , \text{ comme pulsation}$$

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le cylindre perd l'appui sur le plan de contact, et il n'y a donc plus de roulement. On se retrouve dans le cas d'un oscillateur harmonique tout simple

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \omega_0' = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

On remarque que $\omega_0' > \omega_0$. Ce résultat se justifie du fait que la rotation du cylindre est associée à une inertie supplémentaire, d'où une pulsation plus basse.

Exercice 2 : Modélisation vibratoire élémentaire d'un tapis roulant



1- L'application du PFD associé à un mouvement de rotation permet d'établir les équations couplées du mouvement :

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 = -k_1(R_1\theta_1)R_1 - k_2(R_1\theta_1 - R_2\theta_2)R_1 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 = -k_3(R_2\theta_2)R_2 - k_2(R_2\theta_2 - R_1\theta_1)R_2 \end{cases}$$

En présence de symétrie, ces équations se mettent sous la forme :

$(J_1 = J_2 = J \ ; \ k_1 = k_2 = k_3 = k \ ; \ R_1 = R_2 = R)$

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 = -2kR^2\theta_1 + kR^2\theta_2 \\ J\ddot{\theta}_2 = -2kR^2\theta_2 + kR^2\theta_1 \end{cases}$$

soit en notant la pulsation $\omega_0^2 = kR^2/J$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + 2\omega_0^2\theta_1 - \omega_0^2\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + 2\omega_0^2\theta_2 - \omega_0^2\theta_1 = 0 \end{cases}$$

2- On cherche des solutions harmoniques sous la forme $\theta_1 = A_1 \cos\omega t$ ; $\theta_2 = A_2 \cos\omega t$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

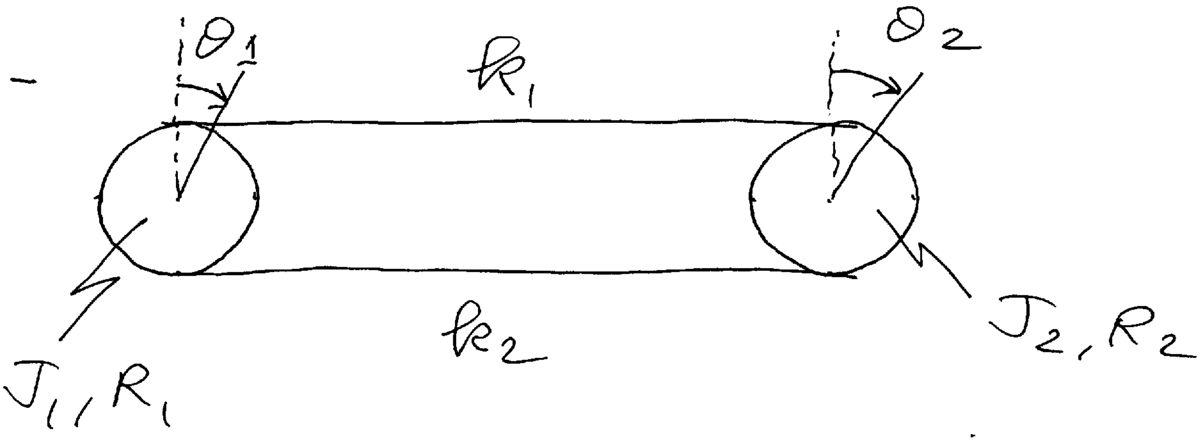
$$\Rightarrow (2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \text{ et } \omega^2 = 3\omega_0^2$$

Pour $\omega^2 = \omega_0^2$, $A = B$, mode en phase

Pour $\omega^2 = 3\omega_0^2$, $B = -A$, mode en opposition de phase

Il existe une analogie forte de ce système avec le cas d'un système en translation à deux degrés de liberté (cf. TP vibrations)

3 -




Les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme :

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = -(k_1 + k_2)(R_1\theta_1 - R_2\theta_2) R_1$$

$$-= (k_1 + k_2)(R_1\theta_1 - R_2\theta_2) R_1$$

$$\Rightarrow J_1 \ddot{\theta}_1 = -(k_1 + k_2)(R_1\theta_1 - R_2\theta_2) R_1$$

et $J_2 \ddot{\theta}_2 = -(k_1 + k_2)(R_2\theta_2 - R_1\theta_1) R_2$

soit en présence de symétrie complète :

$(R_1 = R_2 = R \; ; \; J_1 = J_2 = J \; ; \; k_1 = k_2 = k)$

$$\Rightarrow \begin{cases} J\ddot{\theta}_1 = -2kR^2(\theta_1 - \theta_2) & (1) \\ J\ddot{\theta}_2 = -2kR^2(\theta_2 - \theta_1) & (2) \end{cases}$$

4 — Somme et différence des deux équations :

$(1) + (2) \Rightarrow J(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) = 0$, mode de corps rigide

$(1) - (2) \Rightarrow J(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) = -4kR^2(\theta_1 - \theta_2)$,

soit en notant $H = \theta_1 - \theta_2$

$$\Rightarrow J\ddot{H} + 4kR^2 H = 0,$$

équation d'un oscillateur simple

le mode de corps rigide $\ddot{H} = \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = 0$, s'interprète comme $\theta_1 = \theta_2 = At + B$, c'est à dire une rotation d'ensemble du tapis roulant.

5- Soit $\theta_1 = A_1 \exp j\omega t$ ; $\theta_2 = A_2 \exp j\omega t$, solution des équations du mouvement :

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 + 2kR^2(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ J\ddot{\theta}_2 + 2kR^2(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases},$$

soit en notant $\omega_0^2 = 2kR^2/J$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4 = 0 \Rightarrow \omega^2(\omega^2 - 2\omega_0^2) = 0$$

$\omega = 0 \Rightarrow$ mode de corps rigide, $A_1 = A_2$, mode en phase

$\omega = \sqrt{2}\,\omega_0 \Rightarrow$ mode en opposition de phase car $A_2 = -A_1$

6- En présence d'un couple extérieur appliqué sur le tambour n° 1, noté $\Gamma$, les équations s'écrivent :

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 + 2kR^2(\theta_1 - \theta_2) = \Gamma \\ J\ddot{\theta}_2 + 2kR^2(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases},$$

Soit en notant $\beta = \frac{\Gamma}{J}$ et $\omega_0^2 = 2kR^2/J$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2(\theta_1 - \theta_2) = \beta \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

soit, pour des solutions harmoniques :

$\theta_1 = A_1 \exp j\omega t$ ; $\theta_2 = A_2 \exp j\omega t$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2-\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où $A_1 = \dfrac{\beta(\omega_0^2-\omega^2)}{\omega^2(\omega^2-2\omega_0^2)}$ et $A_2 = \dfrac{\beta\,\omega_0^2}{\omega^2(\omega^2-2\omega_0^2)}$

De plus, en faisant la somme des deux équations du mouvement, on obtient :

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = \underset{\uparrow}{\beta} = \ddot{\Theta}$$

quantité d'accélération

$$\Rightarrow \Theta(t) = \frac{1}{2}\beta t^2 + At + B$$

et $\dot{\Theta}(t) = \underbrace{\beta t + cte}$

↖ vitesse de défilement du tapis

si $\beta = 0$, on retrouve le mode de corps rigide

$$\Theta(t) = At + B$$

En règle générale, il se juxtapose les vibrations libres à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{2kR^2/J}$ en plus du defilement à la vitesse $\beta t + A$

En l'absence de frottement, la vitesse de défilement $\beta t + A$ croît linéairement avec le temps, ce qui n'est pas réaliste.

## Exercice 3 : Vibrations longitudinales d'un poutre encastrée en $x = 0$

1 - On démontre aisément (cf. cours) que :

$$\rho\, u_{,tt} = E\, u_{,xx} ,$$

dont une solution peut s'écrire :

$$u(x,t) = \left( C \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}\, x + D \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}\, x \right) \times \cos \omega t$$

$u(0,t) = 0 \Rightarrow D = 0$

D'où $u(x,t) = A \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}\, x \cos \omega t$

De plus, à la question 1 -, on suppose une extrémité libre en $x = +L$, soit dans ce cas l'absence de déformation

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{(x=+L)} = 0 \Rightarrow \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}\, L = 0 ,$$

soit $2\pi f' \sqrt{\frac{\rho}{E}}\, L = \frac{\pi}{2}(2n-1)$

avec $n = 1, 2, 3$, etc

$$f'_1 = \frac{1}{4L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} , \quad f'_3 = \frac{3}{4L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = 3 f'_1 , \text{ etc}$$

2 - Pour la poutre encastrée en $x = +L$, on doit considérer que $u(L,t) = 0, \forall t$

$$\Rightarrow \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}\, L = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi f \sqrt{\frac{\rho}{E}}\, L = n\pi$$

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}},\ f_2 = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}},\ f_3 = \frac{3}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

etc

Application Numérique pour l'aluminium
$L = 1\,m$ ; $\rho = 2,702\ 10^3\ kg/m^3$
$E = 10,50\ 10^{10}\ N/m^2$

On obtient : $f_1 = 3117\ Hz$

et $f_1' = \frac{f_1}{2} = 1554\ Hz$

+ remarques sur le fait que $f_1 = 2 f_1'$ pour la configuration "encastrée – encastrée" au lieu de la configuration "encastrée – libre"

Augmentation de la fréquence de résonance car système plus contraint et donc quelque part davantage "rigide".

Université du Maine
UFR Sciences

DEUST VAS 2ème année
14 décembre 2005

# Vibrations mécaniques

## Exercice 1 : Oscillations en rotation d'un disque avec des raideurs de rappel

Un disque en mouvement de rotation, de masse $m$ et de rayon $a$ est fixé à un support par l'intermédiaire de ressorts de traction - compression de constante de raideur $k$ (cf. Figure 1, ci-dessous). **Seul le régime des petites oscillations pour lequel $\theta << 1$ sera étudié.**

1- Écrire l'énergie cinétique de rotation en supposant que le moment d'inertie $J$ du cylindre est $J = \frac{1}{2} m\, a^2$ . Écrire l'énergie potentielle liée aux raideurs et calculer l'équation du mouvement, par exemple à partir du théorème de la conservation de l'énergie mécanique ou bien à partir de l'équation de Lagrange.

2- Des amortisseurs visqueux, de coefficient d'amortissement $c$, sont ajoutés sur les côtés du système (cf. Figure 2). Exprimer la nouvelle équation du mouvement, et calculer l'amortissement réduit. Ecrire la solution générale pour les oscillations libres dans le cas du régime sous-critique (ou de type pseudo-périodique).

## Exercice 2 : Oscillations libres d'un double pendule simple avec ou sans raideurs de rappel

Le système de la Figure 3 est constitué d'un double pendule simple permettant des oscillations uniquement dans le plan de la Figure. Les tiges de longueur $\ell$ sont supposées être indéformables et de masse négligeable $m$ . Le premier pendule est couplé au niveau de la masse par deux raideurs de rappel de coefficient $k$ (voir détails sur la Figure 3). Les frottements sont supposés être négligeables. **Seul le régime des petites oscillations pour lequel $\theta_1$ et $\theta_2 << 1$ sera étudié.**

1- Calculer les énergies cinétiques et potentielles de chaque masse, ainsi que l'énergie potentielle emmagasinée par les ressorts. Montrer que les énergies cinétique et potentielle totale peuvent se mettre sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} m\, \ell^2 \left(2\, \dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + 2\, \dot\theta_1 \dot\theta_2\right) ; \; U = \frac{1}{2} m\, g\, \ell \left(2\, \theta_1^2 + \theta_2^2\right) + k\, \ell^2\, \theta_1^2 \; .$$

2- Écrire les équations du mouvement en utilisant les équations de Lagrange, et montrer qu'elles peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\ell\left(2\,\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+\left(2\,g+2\,\frac{k\,\ell}{m}\right)\theta_1=0$$

$$\ell\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+g\,\theta_2=0$$

3- Dans le cas où les deux raideurs latérales sont absentes *($k$ = 0)*, chercher les modes propres d'oscillations. Pour cela, en notant $\omega_0^2=\frac{g}{\ell}$ , écrire les solutions sous forme harmonique $\theta_i=\Theta_i\cos\left(\omega t+\phi_i\right)$ , $i = 1,\ 2$. Calculer les pulsations propres et les vecteurs propres correspondants. Discuter qualitativement sur les valeurs numériques des déplacements modaux obtenus.

4- Dans le cas où les deux raideurs latérales sont très fortement rigides (à la limite $k \to \infty$), montrer que $\theta_1 \ll \theta_2$, c'est à dire que l'on retrouve à la limite le résultat d'un pendule simple. Justifier votre réponse sur un simple argument physique.

5- Pour le cas général où les raideurs latérales ne sont pas nulles ou de valeur infinie, étudier les modes propres pour les équations complètes du mouvement (cf. question 2-) en notant : $\omega_{01}^2=\frac{g}{\ell}$ ; $\omega_{02}^2=\frac{k}{m}$ . On suppose de plus que $\omega_{02}^2=\omega_{01}^2\left(1+\varepsilon\right)$ , avec $\varepsilon \ll 1$. Exprimer l'équation aux pulsations dans ce cas, et montrer que les deux pulsations propres s'écrivent lorsque $\varepsilon = 0$ sous la forme $\omega^2=\left(3\pm\sqrt{5}\right)\omega_{01}^2$ .

6- Comparer le résultat de la question précédente pour les pulsations propres avec celui obtenu pour un double pendule simple sans raideurs latérales (cf. question 3-). Justifier qualitativement l'écart plus grand qui existe entre les deux pulsations propres pour la configuration avec raideurs latérales par rapport à celle sans raideur latérale. Que peut-on en déduire sur les déplacements modaux correspondants ?

## Exercice 3 : Vibrations longitudinales d'une poutre encastrée en $x = 0$ et attachée à une masse $M$ (en $x = +L$)

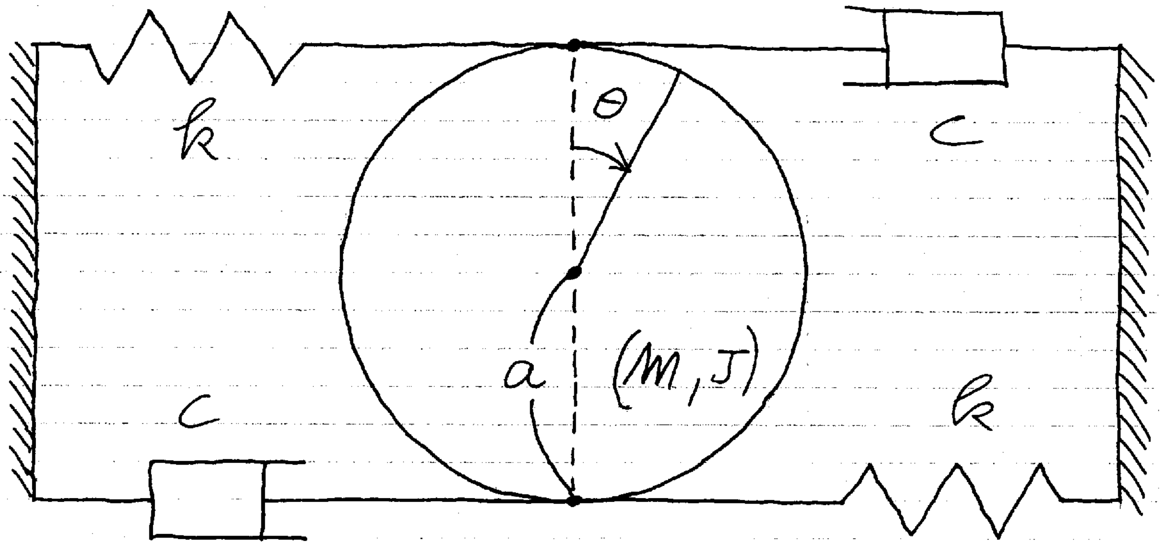
1- Soit une poutre de longueur $L$ "encastrée - attachée" en **mouvement longitudinal.** On supposera que la poutre est encastrée en $x = 0$, soit $u_{(x=0)}=0$ (cf. Figure 4). La poutre est de section $S$, de module d'Young $E$ et de masse volumique $\rho$. Écrire le théorème de la résultante dynamique (principe fondamental de la dynamique pour le mouvement en translation) sous la forme $F_{(x=+L)}=SE\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(x=+L)}=-M\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{(x=+L)}$ , et aboutir à la relation de dispersion sous la forme $L\,\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\tan\left(L\,\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\right)=\frac{\rho\,L\,S}{M}$ .

2- Dans le cas limite pour lequel $M >> m_{barre} = \rho\ L\ S$, <u>montrer</u> que la fréquence angulaire (ou pulsation) fondamentale $\omega_0$ peut se mettre sous la forme $\omega_0 = \sqrt{\frac{E\,S}{L\,M}}$ . <u>Interpréter</u> ce résultat en liaison avec le cas des vibrations d'un oscillateur constitué d'une masse $M$ accrochée à une raideur de constante $K$ que l'on déterminera.

3- Dans le cas général l'équation de dispersion de la question 1- peut se mettre sous la forme $X\ tan\ X = R$, avec $X = L\,\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}$ et $R = \frac{\rho\,L\,S}{M}$. En utilisant une construction graphique (représentation des fonctions *tan X* et *R/X*), <u>montrer</u> que les solutions $X_n$ des différents modes doivent pouvoir d'écrire $X_n = n\pi + \varepsilon_n$, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ <u>Montrer</u> alors que pour un mode d'ordre $n$ arbitraire, $\varepsilon_n = \frac{1}{2}\left(-n\pi + \sqrt{n^2\pi^2 + 4R}\right)$. <u>Montrer</u> finalement que $\varepsilon_n \dashrightarrow 0$ lorsque $n \dashrightarrow \infty$. <u>En déduire</u> que les vibrations longitudinales d'une poutre "encastrée - attachée" sont "presque harmoniques", tout du moins pour les modes de vibrations de fréquences suffisamment élevées.

---

***Nota Bene : Le barême envisagé est de 4 points pour l'exercice 1, 10 points pour l'exercice 2, et 6 points pour l'exervice 3.***




Figures 1 & 2

(Figure 1 pour $c = 0$ ; Figure 2 pour $c \neq 0$)

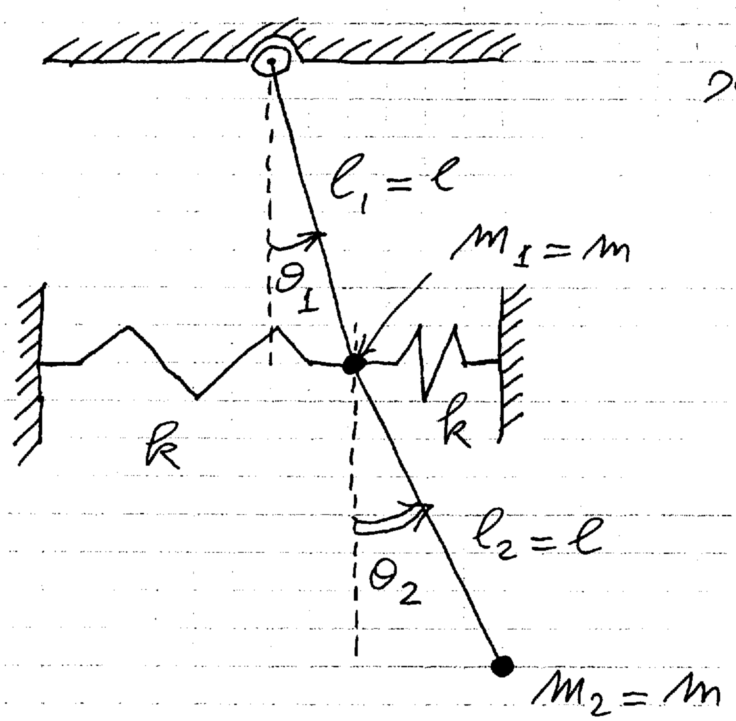



Figure 3

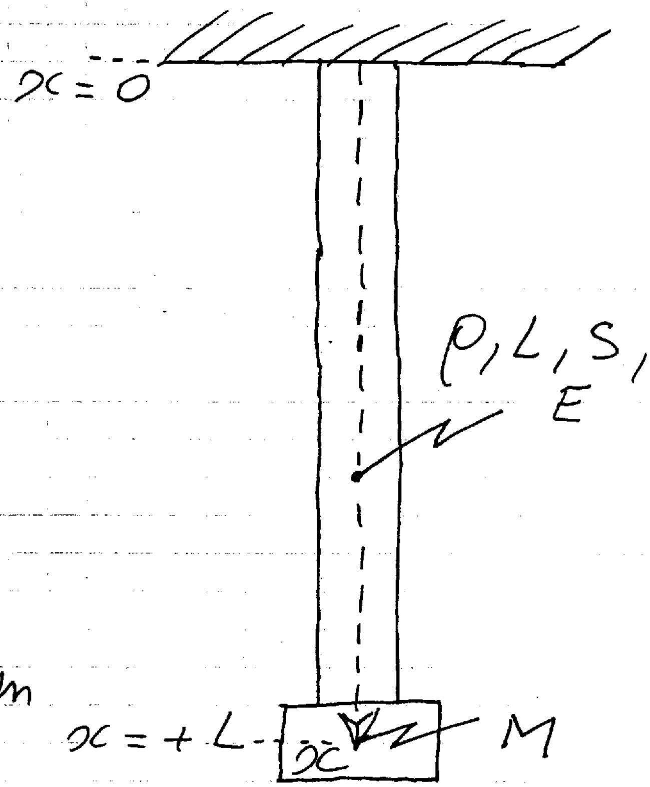



Figure 4

DEUST VAS 2ème année _ Dec. 2005

Examen de vibrations mécaniques

## Exercice 1 : Oscillations en rotation d'un disque avec des raideurs de rappel

PFD $\Rightarrow \quad J\ddot{\theta} = -2ka^2\theta - 2ca^2\dot{\theta}$

$$J = \frac{1}{2}ma^2 \quad (\text{pour un disque})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ma^2\ddot{\theta} + 2ca^2\dot{\theta} + 2ka^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{\theta} + 4c\dot{\theta} + 4k\theta = 0$$

$$\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \; ; \; 2\lambda = 2\varepsilon\omega_0 = \frac{4c}{m}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{4c}{m} \times \frac{2}{2\omega_0} = \frac{4c}{m} \times \frac{1}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{\sqrt{km}} \quad + \text{ solutions ---}$$

## Exercice 2 : Oscillations libres d'un double pendule simple avec ou sans raideurs de rappel

1 _ Soit le 1er pendule de longueur $\ell_1$ et de masse $m_1$, puis le 2ème pendule de longueur $\ell_2$ et de masse $m_2$.

$$x_1 = \ell_1 \sin\theta_1 \; ; \; y_1 = \ell_1 \cos\theta_1$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 \\ U_1 = -m_1 g \ell_1 \cos\theta_1 + U_{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2 \\ y_2 = \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ \quad = \frac{1}{2}m_2\left[\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right] \\ U_2 = -m_2 g(\ell_1\cos\theta_1 + \ell_2\cos\theta_2) + U_{20} \end{cases}$$

Soit en utilisant la linéarisation et la symétrisation ($\ell_1 = \ell_2 = \ell$ ; $m_1 = m_2 = m$)

$$T_1 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}_1^2 \; ; \; U_1 = -mg\ell\left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

$$U_2 = + mg\ell\left(\frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}\right)$$

Soit au total :

$$T = \frac{1}{2} m \ell^2 (2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

$$U = \frac{1}{2} mg\ell (2\theta_1^2 + \theta_2^2) + k\ell^2\theta_1^2 ,$$

en ayant pris en compte l'énergie potentielle stockée dans les deux ressorts $(2 \times \frac{1}{2} k \ell^2 \theta_1^2)$

2 — Ecrivons les deux équations de Lagrange pour les 2 coordonnées généralisées $\theta_1$ et $\theta_2$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} + \frac{\partial U}{\partial \theta_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2$$

$$\alpha\theta_1 \Rightarrow \quad m\ell^2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + mg\ell \times 2\theta_1 + 2k\ell^2\theta_1 = 0$$

$$\alpha\theta_2 \Rightarrow \quad m\ell^2(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1) + mg\ell\,\theta_2 = 0$$

$$\begin{cases} \ell(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \left(2g + \frac{2k\ell}{m}\right)\theta_1 = 0 \\ \ell(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + g\theta_2 = 0 \end{cases} ,$$

avec les notations suivantes, $\omega_{01}^2 = g/\ell$ et $\omega_{02}^2 = k/m$, les 2 équations s'écrivent finalement :

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + (2\omega_{01}^2 + 2\omega_{02}^2)\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \omega_{01}^2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

3 – Pour le cas où les raideurs latérales sont absentes ($k = 0$), on obtient :

$$\begin{cases} \ell(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + 2g\theta_1 = 0 \\ \ell(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + g\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \omega_{01}^2\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \omega_{01}^2\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Soit en considérant des solutions harmoniques

$\theta_i = \Theta_i \exp j\omega t$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} 2\omega_0^2 - 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^4 = 0$$

$$\Rightarrow [\sqrt{2}(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega^2][\sqrt{2}(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2] = 0$$

$$\sqrt{2}\omega_0^2 = (\sqrt{2}+1)\omega^2 \ ; \ \sqrt{2}\omega_0^2 = (\sqrt{2}-1)\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\omega_0^2 \ ; \ \omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\omega_0^2$$

$$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\omega_0^2 \ ; \ \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2})\omega_0^2$$

+ calcul des vecteurs propres correspondant :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{2} \end{pmatrix} ; \ \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La masse 2 bouge plus que la masse 1

4 – Pour le cas d'une condition limite de type rigide sur le 1er pendule ($k \to \infty$), on obtient $\theta_1 = 0$, et il ne reste alors que la 2ème équation sous la forme

$$\ell\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = 0$$

Il s'agit donc du cas d'un unique pendule.

5 – Dans le cas général, l'équation aux pulsations s'écrit :

$$\det \begin{vmatrix} 2\omega_{01}^2 + 2\omega_{02}^2 - 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \omega_{01}^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2\omega_{01}^2 + 2\omega_{02}^2 - 2\omega^2)(\omega_{01}^2 - \omega^2) - \omega^4 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^4 - 2\omega^2(2\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) + 2\omega_{01}^2(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) = 0$$

$$\Delta' = (2\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^2 - 2\omega_{01}^2(\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2)$$

$$= 2\omega_{01}^2\omega_{02}^2 + \omega_{02}^4 + 2\omega_{01}^4$$

$$\rightarrow \omega_{1,2}^2 = 2\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{2\omega_{01}^2\omega_{02}^2 + \omega_{02}^4 + 2\omega_{01}^4}$$

si $k = 0$, $\omega_{02}^2 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = 2\omega_{01}^2 \pm \sqrt{2}\,\omega_{01}^2$ CQFD

lorsque $\omega_{02}^2 = \omega_{01}^2(1+\varepsilon)$, avec $\varepsilon \ll 1$, on obtient :

$$\omega_{1,2}^2 = 2\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2(1+\varepsilon) \pm \sqrt{2\omega_{01}^4(1+\varepsilon) + \omega_{01}^4(1+\varepsilon)^2 + 2\omega_{01}^4}$$

$$\omega_{1,2}^2 = 3\omega_{01}^2 + \varepsilon\omega_{01}^2 \pm \sqrt{5\omega_{01}^4 + 4\omega_{01}^4\,\varepsilon}$$

$$\omega_{1,2}^2 = 3\omega_{01}^2 + \varepsilon\omega_{01}^2\varepsilon \pm \sqrt{5}\,\omega_{01}^2\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon\right)$$

$$\omega_{1,2}^2 = (3 \pm \sqrt{5})\omega_{01}^2 + \varepsilon\omega_{01}^2\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

6 – Pour $\varepsilon = 0$, $\omega_{01}^2 = \omega_{02}^2$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = (3 \pm \sqrt{5})\,\omega_{01}^2 \begin{cases} \nearrow 5{,}22\,\omega_{01}^2 \\ \searrow 0{,}76\,\omega_{01}^2 \end{cases},$$

résultat à comparer avec celui du cas sans raideur latérale $\omega'^2_{1,2} = (2 \pm \sqrt{2})\omega_{01}^2 \begin{cases} \nearrow 3{,}41\,\omega_{01}^2 \\ \searrow 0{,}58\,\omega_{01}^2 \end{cases}$ ;

les nouvelles pulsations sont plus élevées éloignées que les précédentes, du fait de la contrainte mécanique supplémentaire en terme de déplacement, résultat que l'on retrouve bien entendu sur les vecteurs propres associés.

$$\Delta\omega_{1,2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = 6{,}87$$

$$\Delta\omega'_{1,2} = \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 5{,}86$$

## Exercice 3 : Relations de dispersion pour une poutre en flexion – Calcul approché de la fréquence fondamentale

1 – Pour une poutre encastrée – libre, encastrée en $x=0$, $(\omega)_{(x=0)} = 0$ ; $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{(x=0)} = 0$, et libre en $x = +L$ :

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)_{(x=+L)} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3}\right)_{(x=+L)} = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\sin\beta L & -\cos\beta L & \sinh\beta L & \cosh\beta L \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos\beta L & \sin\beta L & \cosh\beta L & \sinh\beta L \end{vmatrix} = 0$$

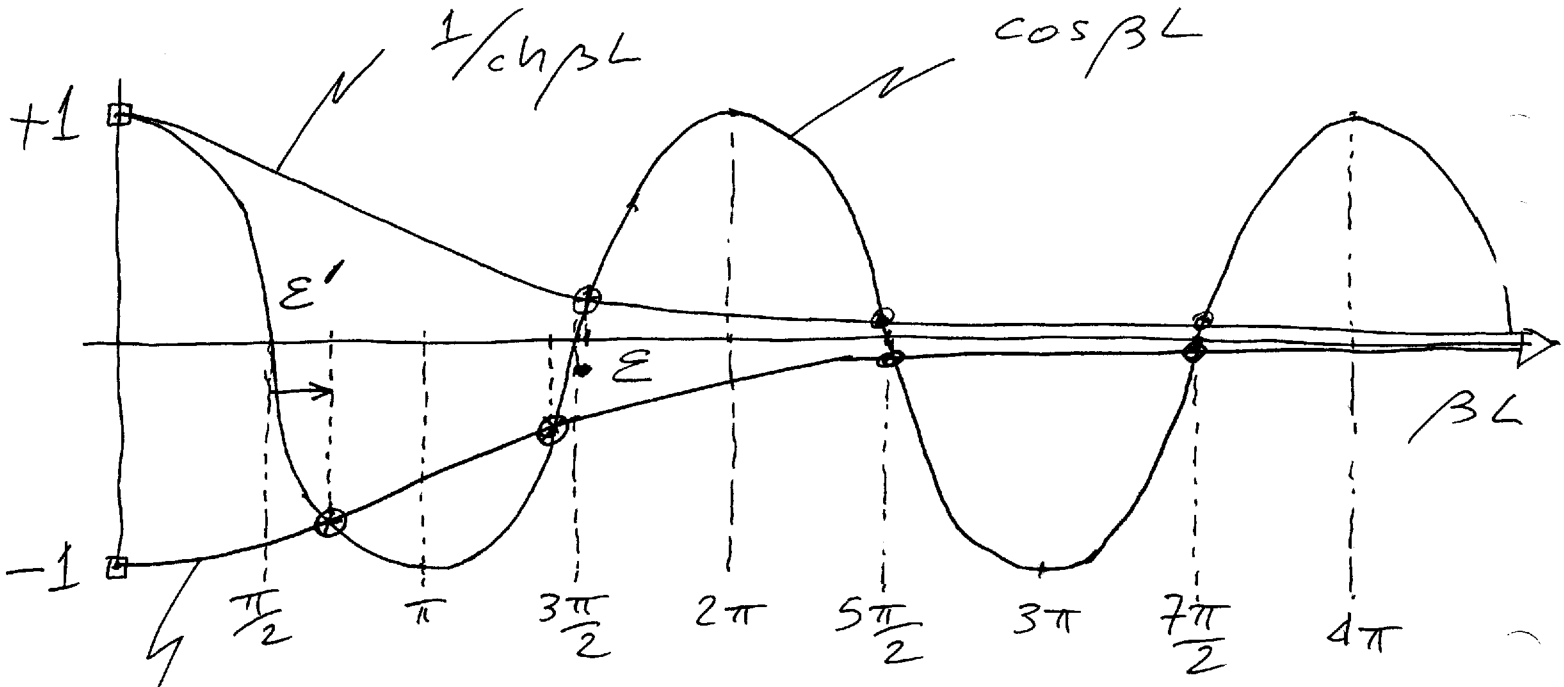
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\sin\beta L & \sinh\beta L & \cosh\beta L \\ 1 & 1 & 0 \\ -\cos\beta L & \cosh\beta L & \sinh\beta L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\sin\beta L & -\cos\beta L & \sinh\beta L \\ 1 & 0 & 1 \\ -\cos\beta L & \sin\beta L & \cosh\beta L \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\sinh^2\beta L - \cosh^2\beta L\right) + \left(-\sin\beta L \sinh\beta L + \cos\beta L \cosh\beta L\right)$$
$$- \left(-\cos\beta L \cosh\beta L - \sin\beta L \sinh\beta L\right) - \left(-\sin^2\beta L - \cos^2\beta L\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos\beta L \cosh\beta L = -2 \qquad \text{CQFD}$$

2 – Le développement de $\beta L$ autour de $\frac{\pi}{2}$ se justifie par le tracé de la courbe $\cos\beta L = 1/\cosh\beta L$ (cf. page suivante)

$$\Rightarrow \beta L = \frac{\pi}{2} + \varepsilon', \text{ avec } \varepsilon' \ll 1$$




$$\begin{cases} 1/\mathrm{ch}\beta L \Rightarrow \beta L = \frac{3\pi}{2} + \varepsilon \\ -1/\mathrm{ch}\beta L \Rightarrow \beta L = \frac{\pi}{2} + \varepsilon' \end{cases}$$

$$\cos\beta L = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon'\right) = -\sin\varepsilon'$$

$$\mathrm{ch}\beta L = \mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon'\right) = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon'} + e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon'\right)}\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{ch}\beta L = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{\pi}{2}}e^{\varepsilon'} + e^{-\frac{\pi}{2}}e^{-\varepsilon'}\right]$$

$$\Rightarrow \left(e^{\frac{\pi}{2}}e^{\varepsilon'} + e^{-\frac{\pi}{2}}e^{-\varepsilon'}\right)\sin\varepsilon' = 2$$

$$\Rightarrow \left(e^{\pi/2}(1+\varepsilon') + e^{-\frac{\pi}{2}}(1-\varepsilon')\right)\varepsilon' = 2$$

$$\Rightarrow \varepsilon' = \frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} = 0{,}398 \text{ au lieu de } 0{,}305$$

3 – De même pour la relation de dispersion $\cos\beta L = +1/\cosh\beta L$, on écrit $\beta L = \frac{3\pi}{2} + \varepsilon$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{2}{e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{-\frac{3\pi}{2}}} = 0{,}018 \text{ au lieu de } 0{,}018$$

(valeur exacte).

On constate que $\varepsilon << \varepsilon'$, ce qui se justifie tout à fait sur la figure.

Université du Maine
UFR Sciences

DEUST VAS $2^{\text{ème}}$ année
13 décembre 2004

# Vibrations mécaniques

## Exercice 1 : Oscillations d'un cylindre en roulement sans glissement sur un plan horizontal

Un cylindre de masse $m$ et de rayon $r$ est fixé à un support par l'intermédiaire d'un ressort de traction - compression de constante de raideur $k$. Le cylindre est en mouvement mixte de translation - rotation sans glissement sur le support horizontal ($\dot{x} = r\dot{\theta} = r\omega$), cf. Figure 1, ci-dessous.

1- <u>Écrire</u> l'énergie cinétique de translation et celle de rotation en supposant que le moment d'inertie $J$ du cylindre est $J = \frac{1}{2}mr^2$. <u>Écrire</u> l'énergie potentielle liée à la raideur et <u>calculer</u> l'équation du mouvement, par exemple à partir du théorème de la conservation de l'énergie mécanique ou bien à partir de l'équation de Lagrange.

2- Le cylindre du système précédent est dorénavant monté entre deux ressorts identiques de constante de raideur k. On ajoute de plus de part et d'autre du cylindre des amortisseurs visqueux de constante d'amortissement $c$ (cf. Figure 2). <u>Écrire</u> la nouvelle équation du mouvement. <u>En déduire</u> la valeur limite de $c$ correspondant au régime critique. <u>Calculer</u> la valeur de la constante d'amortissement réduit $\varepsilon = \frac{\lambda}{\omega_0}$. Écrire la solution temporelle $x(t)$ pour le régime pseudo-périodique (ou régime sous-critique) tel que $\varepsilon < 1$.

## Exercice 2 : Oscillations libres de trois masses couplées en translation sur un plan horizontal

Le système de la Figure 3 est constitué de 3 petits charriots de masse $m$, couplés par des ressorts de tension – compression ayant des constantes de raideur $k$ au centre et $2k$ aux extrémités. Chaque charriot est en mouvement de translation sur le plan horizontal (cf. Figure 3 pour les détails). Les frottements sont supposés être négligeables.

1- <u>Écrire</u> les équations du mouvement et montrer qu'elles peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$m\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En notant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, écrire les solutions sous forme harmonique $x_i = X_i \cos(\omega t + \phi_i)$, $i = 1, 2, 3$. Calculer les pulsations propres et les vecteurs propres correspondants.

2- Écrire la solution générale, combinaison linéaire des 3 modes propres établis à la question précédente. Rechercher alors les valeurs des termes d'amplitude $X_i$ et de phase $\phi_i$ à partir des conditions initiales suivantes $x_{i\,0} = x_i(t=0) = (0, 0, 0)$ ; $\dot{x}_{i\,0} = \dot{x}_i(t=0) = (\alpha, 0, 0)$. On pourra utiliser au choix la méthode " lourde " (résolution d'un système de 6 équations à 6 inconnues) ou bien celle " légère " du formalisme des coordonnées normales.

3- Le système précédent est rendu cyclique en fixant les deux raideurs de constante $2k$ l'une à l'autre (cf. Figure 4). On suppose qu'un tel système peut effectivement être fabriqué d'un point de vue technologique, notamment en guidant les raideurs sur les trajectoires circulaires des petits charriots. Montrer que les deux raideurs de constante $2k$ mises en série aboutissent à une raideur équivalente de constante $k$. Écrire les nouvelles équations du mouvement et calculer les nouveaux modes propres (pulsations et vecteurs propres correspondants). Justifier l'existence du mode de corps rigide $(\omega_1 = 0)$. Comment interpréter la dégénérescence associée à la valeur propre double ($\omega_{2,3}^2 = 3\,\omega_0^2$) ?

## Exercice 3 : Relations de dispersion pour une poutre en flexion pour différentes conditions aux limites

1- Pour une poutre de longueur $L$ "libre-libre" en flexion, les conditions aux limites aux extrémités sont de considérer le moment fléchissant nul $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{(x=0,\ +L)} = 0$, et la force de cisaillement nulle $\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_{(x=0,\ +L)} = 0$. En déduire l'équation de dispersion associée aux 4 conditions aux limites précédentes. Montrer qu'elle peut finalement se mettre sous la forme $\cos \beta L \, ch\, \beta L = 1$, avec $\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}$, où $\rho$, $S$, $E$, $I$ sont respectivement la masse volumique , la section, le module d'Young et le moment quadratique de la poutre, avec $\omega$ pulsations de résonance, solutions de l'équation de dispersion.

2- Refaire le même calcul pour le cas d'une poutre en flexion "encastrée - articulée". On supposera que la poutre est encastrée en $x = 0$, soit $w_{(x=0)} = 0$ et $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(x=0)} = 0$, et qu'elle est articulée en x = +L, soit $w_{(x=+L)} = 0$ et $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{(x=+L)} = 0$. Montrer que l'équation de dispersion dans ce cas se met sous la forme $\tan \beta L = th\, \beta L$.

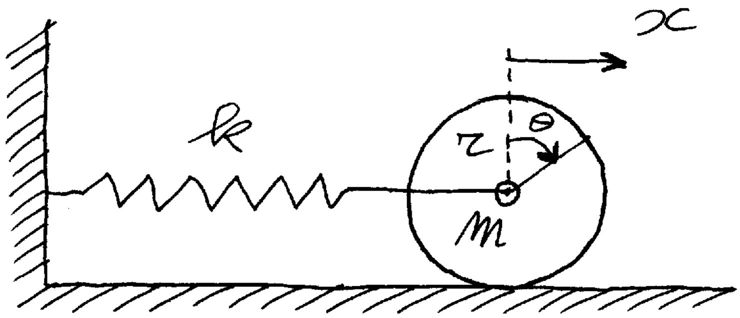



Figure 1

Figure 2

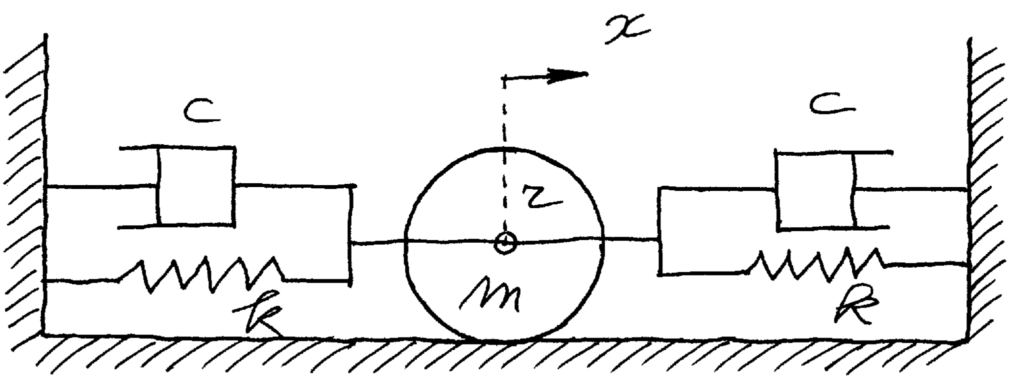
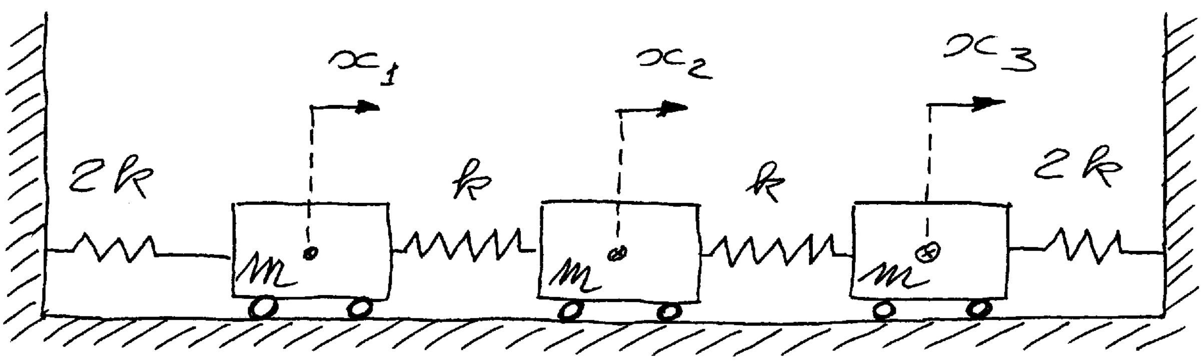



Figure 3



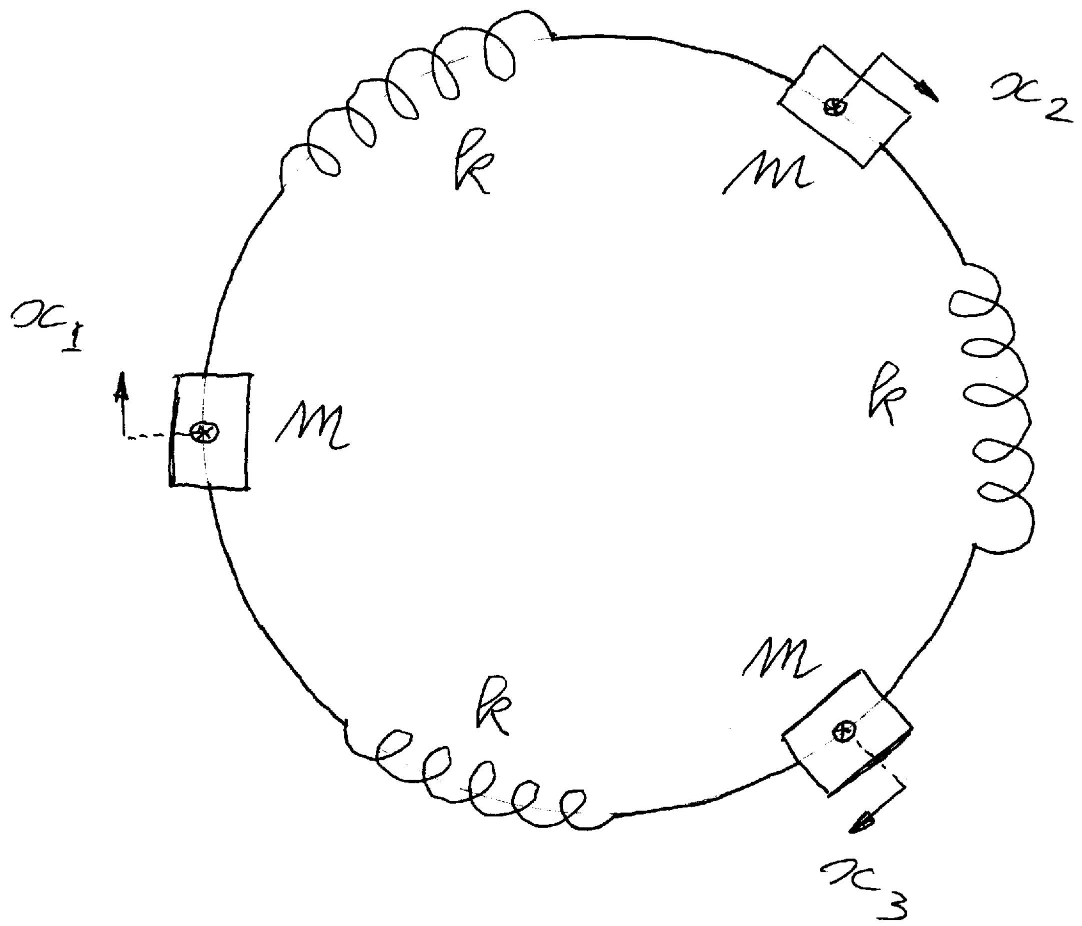



Figure 4

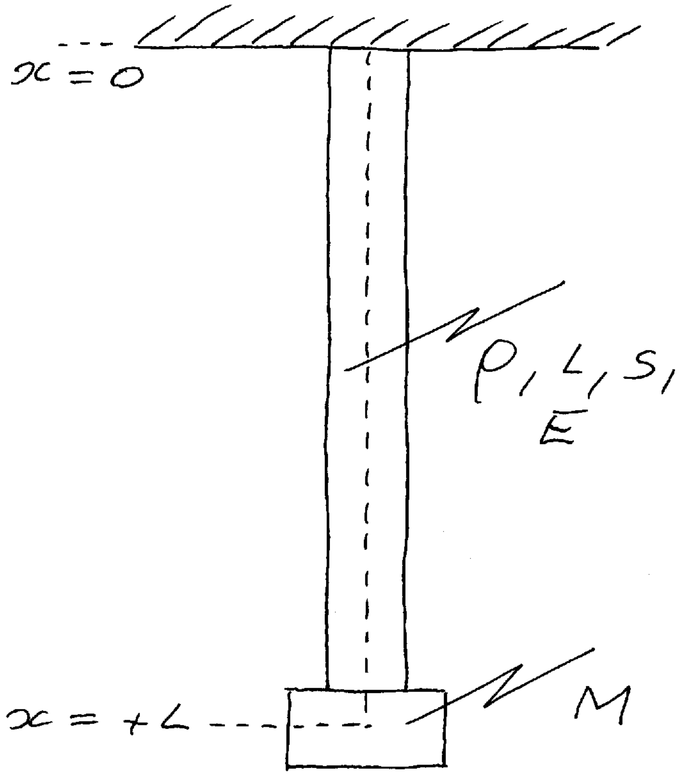


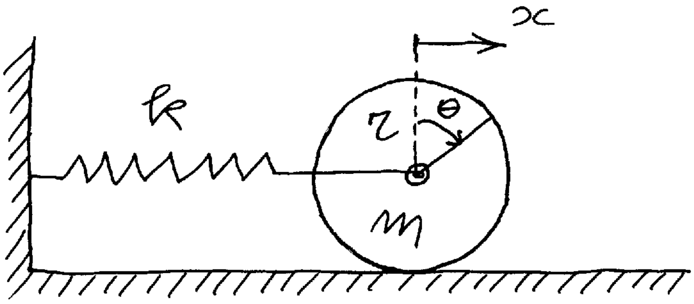

Figure 5

DEUST VAS 2ème année – Dec. 04

Examen de "Vibrations mécaniques"

Exercice 1 : Oscillations d'un cylindre en roulement sans glissement sur un plan horizontal

1 –




$$E_c = E_c^{rot} + E_c^{trans} = \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

roulement sans glissement :

$$\Rightarrow \quad x = r\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = r\dot{\theta} = r\omega \, ,$$

soit avec $J = \frac{1}{2} m r^2$

$$\Rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right)\frac{\dot{x}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

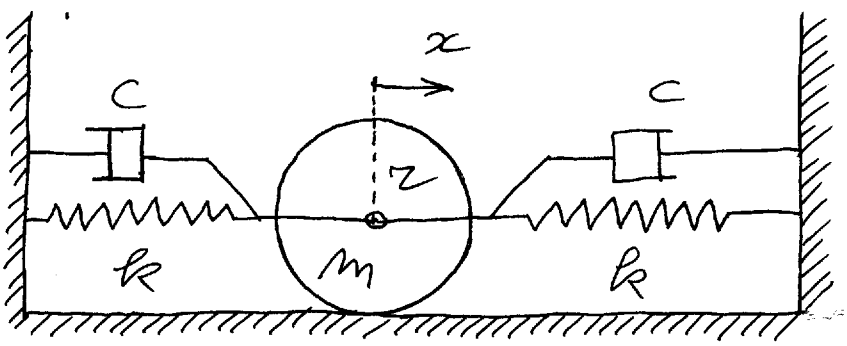
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) m \dot{x}^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{dE_p}{dt} + \frac{dE_c}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 k x \dot{x} + \frac{3}{4} \cdot 2 m \dot{x} \ddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2} m \ddot{x} + k x = 0$$

2 –



L'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = 0$$

$$\Delta' = 4c^2 - 12km$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4c_{lim}^2 = 12km$$

$$\Rightarrow c_{lim} = \sqrt{3km}$$

solution pseudopériodique :

$$\ddot{x} + \frac{4c}{3m}\dot{x} + \frac{4k}{3m}x = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

avec $\lambda = \dfrac{2c}{3m}$ ; $\omega_0^2 = \dfrac{4k}{3m}$

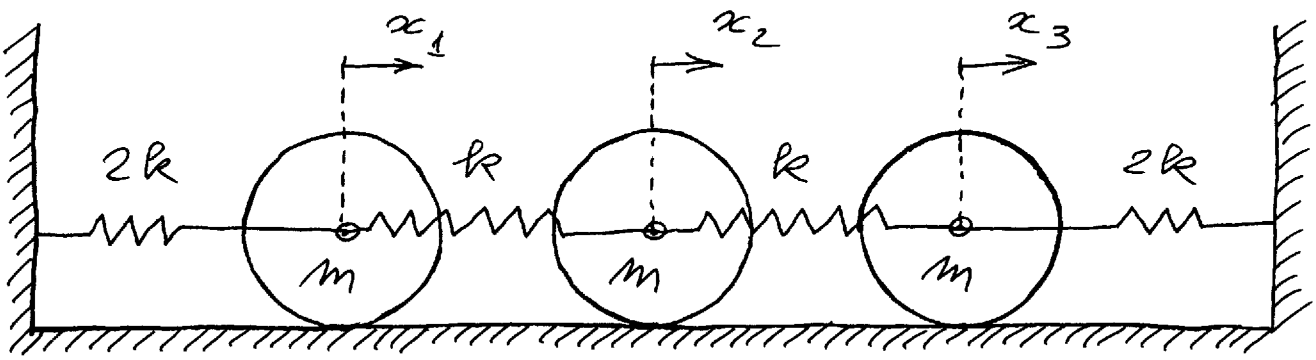
$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{2c}{3m} \times \sqrt{\frac{3m}{4k}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{c}{\sqrt{3km}}$$

$$x(t) = \left(A_1 \exp j\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\omega_0 t + A_2 \exp -j\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\omega_0 t\right) \times \exp(-\varepsilon\omega_0 t)$$

$$x(t) = \left(B_1 \cos\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\omega_0 t + B_2 \sin\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\omega_0 t\right) \times \exp(-\varepsilon\omega_0 t)$$

__Exercice 2__ : Oscillations libres de trois cylindres couplés en rotation – translation

1 –



Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{3}{2} m \ddot{x}_1 + k(3x_1 - x_2) = 0 \\ \frac{3}{2} m \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) = 0 \\ \frac{3}{2} m \ddot{x}_3 + k(3x_3 - x_2) = 0 \end{cases}$$

soit en notant $M = \frac{3}{2} m$

$$\Rightarrow M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

soit en notant $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$ ; $x_i = X_i \cos(\omega t + \phi_i)$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} 3\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & 3\omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3\omega_0^2 - \omega^2)\left[(2\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^4\right] - \omega_0^4(3\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow (3\omega_0^2 - \omega^2)\left[(2\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2) - 2\omega_0^4\right] = 0$$

$$\Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)(4\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$

$\omega^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $\omega^2 = 3\omega_0^2 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\omega^2 = 4\omega_0^2 \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & 3\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \Rightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ 2X_2 + X_1 + X_3 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 — $\bar{\bar{X}}_M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{X}}_N = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \bar{\bar{X}}_N^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_0 = (0,0,0) \ ; \ \bar{\dot{x}}_0 = (\alpha, 0, 0)$$

$$\bar{\dot{x}}_{0N} = \bar{\bar{X}}_N^{-1} \, \dot{x}_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$x_{Ni}(t) = \underbrace{\cancel{x_{0Ni} \cos \omega_i t}}_{=0} + \frac{\dot{x}_{0Ni}}{\omega_i} \sin \omega_i t$$

$$\Rightarrow \bar{x}_N(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} (\sin \omega_1 t)/\omega_1 \\ \sqrt{3} (\sin \omega_2 t)/\omega_2 \\ \sqrt{2} (\sin \omega_3 t)/\omega_3 \end{pmatrix},$$

soit en revenant aux coordonnées de départ :

$$x(t) = \frac{\alpha}{6} \begin{pmatrix} (\sin \omega_1 t)/\omega_1 + 3(\sin \omega_2 t)/\omega_2 + 2(\sin \omega_3 t)/\omega_3 \\ 2(\sin \omega_1 t)/\omega_1 - 2(\sin \omega_3 t)/\omega_3 \\ (\sin \omega_1 t)/\omega_1 - 3(\sin \omega_2 t)/\omega_2 + 2(\sin \omega_3 t)/\omega_3 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier le résultat de ce calcul à l'aide de l'écriture à partir de la solution générale :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + A_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \\ x_2(t) = 2A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \\ x_3(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_3 t + \phi_2) + A_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \end{cases}$$

$$x_0 = (0,0,0) \text{ et } \dot{x}_0 = (\alpha, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 0 = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 + A_3 \cos \phi_3 & (1) \\ 0 = 2A_1 \cos \phi_1 - A_3 \cos \phi_3 & (2) \\ 0 = A_1 \cos \phi_1 - A_2 \cos \phi_2 + A_3 \cos \phi_3 & (3) \\ -\alpha = A_1 \omega_1 \sin \phi_1 + A_2 \omega_2 \sin \phi_2 + A_3 \omega_3 \sin \phi_3 & (4) \\ 0 = 2A_1 \omega_1 \sin \phi_1 - A_3 \omega_3 \sin \phi_3 & (5) \\ 0 = A_1 \omega_1 \sin \phi_1 - A_2 \omega_2 \sin \phi_2 + A_3 \omega_3 \sin \phi_3 & (6) \end{cases}$$

$$(1)-(3) \Rightarrow \quad A_2 \cos\phi_2 = 0$$
$$(4)-(6) \Rightarrow \quad 2A_2\omega_2 \sin\phi_2 = -\alpha \quad \Big\} \Rightarrow \phi_2 = \frac{\pi}{2}$$
$$(1)+(3) \Rightarrow \quad A_1\cos\phi_1 + A_3\cos\phi_3 = 0$$
$$(4)+(6) \Rightarrow \quad 2A_1\omega_1\sin\phi_1 + 2A_3\omega_3\sin\phi_3 = -\alpha$$
$$\Rightarrow \phi_1 = \phi_3 = \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha = A_1\omega_1 + A_2\omega_2 + A_3\omega_3 \\ 0 = 2A_1\omega_1 - A_3\omega_3 \\ 0 = A_1\omega_1 - A_2\omega_2 + A_3\omega_3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2A_2\omega_2 = -\alpha \; ; \quad 6A_1\omega_1 = -\alpha$$
$$A_2 = -\frac{\alpha}{2\omega_2} \; ; \quad A_1 = -\frac{\alpha}{6\omega_1}$$
$$(4)+(6)-(5) \Rightarrow -\alpha = 3A_3\omega_3 \Rightarrow A_3 = -\frac{\alpha}{3\omega_3},$$
d'où le résultat attendu

3 – Système cyclique – raideurs 2k et 2k en série ⇒ raideur résultante = k (cf. cours). Les équations du mouvement sont modifiées et elles deviennent :

$$M\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\\\ddot{x}_3\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 & -\omega_0^2\\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2\\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad [S]$$

$$\Rightarrow \det\begin{vmatrix}2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 & -\omega_0^2\\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2\\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2\omega_0^2-\omega^2)\left[(2\omega_0^2-\omega^2)^2-\omega_0^4\right] - 2\omega_0^4(3\omega_0^2-\omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2(3\omega_0^2-\omega^2)^2 = 0,$$ d'où un mode de corps rigide ($\omega_1 = 0$) et 2 valeurs propres dégénérées $\omega_{2,3}^2 = 3\omega_0^2$

## Exercice 3 : Relation de dispersion pour une poutre en flexion

* poutre "libre - libre" (ou "encastrée - encastrée")

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{(x=0,+L)} = 0 \; ; \quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_{(x=0,+L)} = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin\beta L & \cos\beta L & \mathrm{sh}\beta L & \mathrm{ch}\beta L \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos\beta L & -\sin\beta L & \mathrm{ch}\beta L & \mathrm{sh}\beta L \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \sin\beta L & \mathrm{sh}\beta L & \mathrm{ch}\beta L \\ 1 & 1 & 0 \\ \cos\beta L & \mathrm{ch}\beta L & \mathrm{sh}\beta L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin\beta L & \cos\beta L & \mathrm{sh}\beta L \\ 1 & 0 & 1 \\ \cos\beta L & -\sin\beta L & \mathrm{ch}\beta L \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -(\mathrm{sh}^2\beta L - \mathrm{ch}^2\beta L) + (\sin\beta L\,\mathrm{sh}\beta L - \cos\beta L\,\mathrm{ch}\beta L)$$
$$-(\cos\beta L\,\mathrm{ch}\beta L + \sin\beta L\,\mathrm{sh}\beta L) - (-\sin^2\beta L - \cos^2\beta L) = 0$$

$$\Longrightarrow \; 2\cos\beta L\,\mathrm{ch}\beta L = 2 \qquad \text{CQFD}$$

* poutre "encastrée - articulée"

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin\beta L & \cos\beta L & \mathrm{sh}\beta L & \mathrm{ch}\beta L \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta L & -\cos\beta L & \mathrm{sh}\beta L & \mathrm{ch}\beta L \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \sin\beta L & \mathrm{sh}\beta L & \mathrm{ch}\beta L \\ 1 & 1 & 0 \\ -\sin\beta L & \mathrm{sh}\beta L & \mathrm{ch}\beta L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin\beta L & \cos\beta L & \mathrm{sh}\beta L \\ 1 & 0 & 1 \\ -\sin\beta L & -\cos\beta L & \mathrm{sh}\beta L \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \; 2\sin\beta L\,\mathrm{ch}\beta L + 2\cos\beta L\,\mathrm{sh}\beta L = 0$$

$$\Longrightarrow \; \tan\beta L = \mathrm{th}\beta L \qquad \text{CQFD}$$

Université du Maine
UFR Sciences

DEUST VAS 2ème année
16 décembre 2003

# Vibrations mécaniques

## Exercice 1 : Vibrations d'un système avec tambour

Un tambour, à deux diamètres, de moment d'inertie $I$ est monté sur des paliers qui introduisent de l'amortissement visqueux dans le système. La masse $m$ est soumise à l'action d'une force harmonique $F(t) = F_0 \cos \omega t$. On utilise la coordonnée $\theta$, comme indiqué sur la Figure 1, pour décrire le mouvement.

1- En négligeant tous les frottements, <u>montrer</u> que l'équation du mouvement s'écrit : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\, \theta = \dfrac{2F_0 r}{I + 4mr^2} \cos \omega t$ . <u>Exprimer</u> $\omega_0^2$ en fonction de $k$, $r$, $I$ et $m$.

2- On suppose que le frottement visqueux induit un moment $-a\,\dot{\theta}$ où $a$ est la constante d'amortissement. <u>Ecrire</u> la nouvelle équation du mouvement.

3- <u>Donner</u> l'expression de l'amplitude et de la phase de la réponse forcée (solution permanente) en fonction des paramètres du système.

## Exercice 2 : Vibrations de rotation d'un système arbre / rotors

Un arbre en rotation, constitué d'un axe cylindrique élastique supporte 2 rotors (ou volants d'inertie) qui sont rigidement fixés, de moments d'inertie respectifs $J_1$ et $J_2$. Le système peut-etre entraîné par une courroie montée sur un 3ème rotor d'inertie $J_3$. Chaque volant en rotation est repéré par sa déflexion angulaire $\theta_i$ (avec $i = 1, 2$ ou $3$).

1- Dans un premier temps, le rotor n°3 est démonté. Il ne reste alors que les deux volants 1 et 2 et l'arbre de liaison de raideur de torsion $k_1$ (cf. figure 2). <u>Ecrire</u> les équations du mouvement pour les deux rotors 1 et 2. <u>Comparer</u> vos résultats avec le cas d'un système en translation, par exemple constitué de deux masses reliées par un unique ressort de traction-compression.

2- Calculer alors les deux pulsations propres pour les modes libres, ainsi que les vecteurs propres correspondants. Comment pouvez-vous interpréter la pulsation basse ? Enoncer l'analogie avec le système en translation évoqué à la question précédente.

3- Lorsque la 3ème poulie est en place, avec son moteur et sa courroie de transmission, un moment $M$ extérieur s'exerce alors. Pour ne pas avoir à ajouter un 3ème degré de liberté, on va supposer que $J_3$ est négligeable (par rapport à $J_1$ et $J_2$), et que $k_2$ est supposé très grand (à la limite infini, mais d'inertie négligeable, ce qui revient à appliquer directement le moment $M$ sur le rotor n°2. Comment sont modifiées les équations du mouvement ? Dans le cas où $M = M_0 \cos\omega t$, exprimer la réponse forcée du système.

## Exercice 3 : Vibrations transverses d'une corde rigide

1- Une corde rigide de masse linéique $\lambda$ est soumise à un tension $T_0$. Ecrire l'équation d'onde, et comparer avec le cas des vibrations longitudinales d'une barre.

2- La tension de la corde est modulée en amplitude par l'intermédiaire d'un système vibreur extérieur, sous la forme de $T = T_0 + T_m \cos \omega t$, avec $T_m << T_0$. Etablir la réponse forcée de la corde. Que se passe-t-il lorsque $\omega = \omega_0 = (T_0/\lambda)^{1/2}$ ?

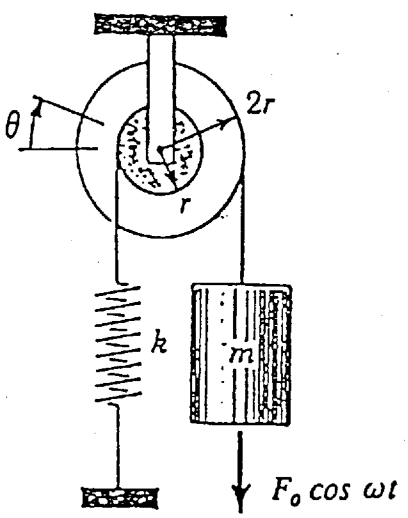



Figure 1

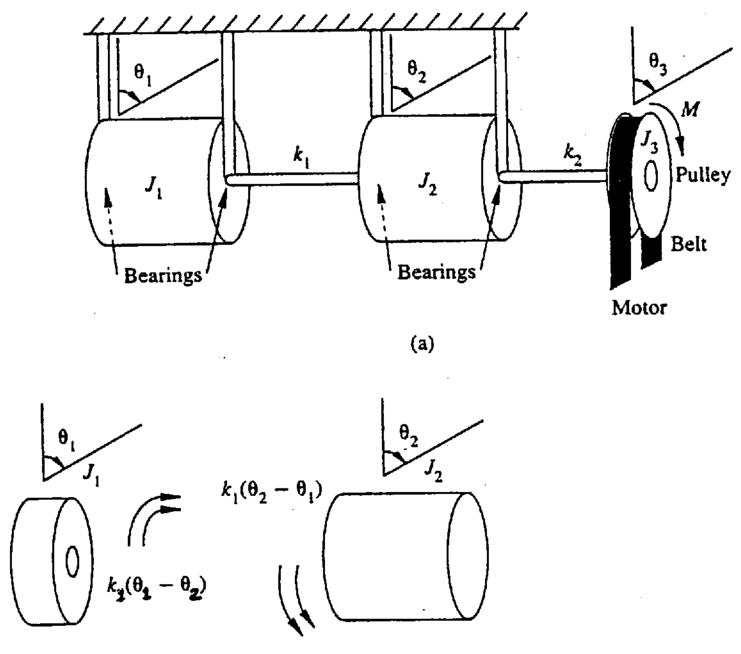
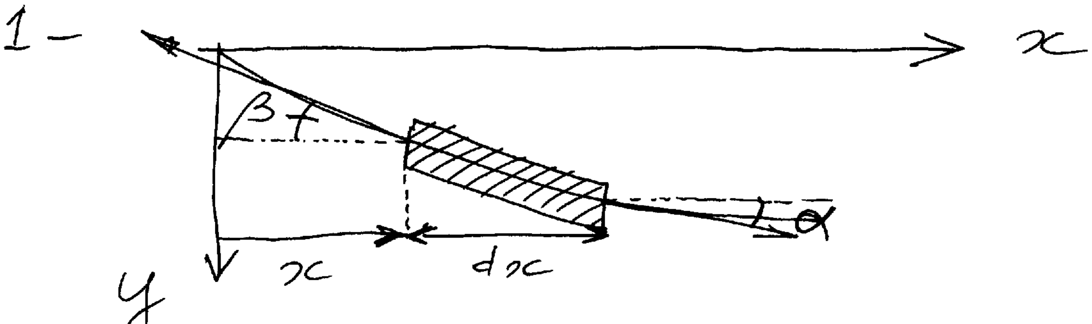



Figure 2

## Exercice 3 : Vibrations transverses d'une corde rigide

1 –




Application du PFD (théorème de la résultante) :

$$m\ddot{y} = \sum F_{ext} \Rightarrow \lambda\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \sin\alpha - T_0 \sin\beta$$

or $\begin{cases} \sin\alpha \simeq \tan\alpha = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x+dx} \\ \sin\beta \simeq \tan\beta = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \lambda\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \left( \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{T_0}{\lambda}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \text{ avec } C_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\lambda}}$$

2 – La solution générale peut se mettre sous la forme :

$$y(x,t) = (A\cos kx + B\sin kx)\cos\omega_0 t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y(x,t) \;;\; \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega_0^2 y(x,t)$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega_0^2}{C_0^2}} \text{ relation de dispersion}$$

$y(0,t) = 0 \Rightarrow A = 0$

$y(L,t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi$

$\Rightarrow k = n\pi / L$

D'où : $y(x,t) = B \sin \frac{n\pi x}{L} \cos\omega_0 t = Y(x) \cos\omega_0 t$

En présence de la force extérieure :

$$\lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + T_m \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \lambda \omega_0^2 Y(x) \cos\omega_0 t = T_0 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y(x) \cos\omega_0 t - T_m \cos\omega t$$

La réponse est proportionnelle à l'excitation, c'est à dire réponse vibratoire linéaire d'où on écrit :

$$F(t) = T \cos\omega t \Rightarrow Y(x,t) = Y(x) \cos \underline{\underline{\omega}} t$$

$$\Rightarrow Y(x)\left[-\lambda\omega^2 + T_0\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right] = T_m$$

$$\Rightarrow |Y(x)| = \left|\frac{T_m}{T_0\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \lambda\omega^2}\right|,$$

soit en divisant numérateur et dénominateur par $\lambda$ :

$$|Y(x)| = \left|\frac{T_m/\lambda}{C_0^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \omega^2}\right|$$

or $C_0^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = C_0^2 k_{\ln}^2 = \omega_0^2$

$$\Rightarrow |Y(x)| = \frac{T_m/\lambda}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

Pour $\omega \to \omega_0$, alors $|Y(x)| \to +\infty$

(phénomène de résonance)